

6. VIRKNES

[Temata apraksts](#)

[Skolēnam sasniedzamo rezultātu ceļvedis](#)

[Uzdevumu piemēri](#)

[Stundas piemērs](#)

[M_10_UP_06_P1](#)

[M_10_LD_06](#)

[Iracionāla skaitļa \$\pi\$ aptuvenās vērtības noteikšana](#)

[Virtnes](#)

[Skolēna darba lapa](#)

[Skolēna darba lapa](#)

[1.variants](#)

[2.variants](#)

[Vērtēšanas kritēriji](#)

VIRKNES

TEMATA APRAKSTS

Skolēniem virknes, aritmētiskās un ģeometriskās progresijas jēdziens ir zināms no pamatskolas. Vidusskolā iespējams parādīt skolēniem, ka temats, kurš nosacīti ir savrups, būtībā ir cieši saistīts ar citiem matemātikas jautājumiem.

Virknes ir lielumu maiņu veidu kvantitatīvi raksturotāji (tai skaitā aritmētiskās un ģeometriskās progresijas raksturo divus ļoti izplatītus lielumu maiņu veidus – ja process rit vienmērīgi vai ir process, kurā pieaugums pats kļūst par jauna pieauguma avotu).

Virknes var interpretēt kā naturāla argumenta funkcijas, kuras atspoguļo lielumu maiņas likumus. Jāakcentē virkņu uzdošanas veidu dažādība, būtiska ir simbolikas lietošanas prasmju pilnveidošana, iespējams nostiprināt prasmi izteikt lielumus no formulas.

Tematā iespējams pievērsties hipotēžu izvirzīšanai, saskatot likumsakarības (par virknes nākamo locekli, virknes locekļu summu), veicināt izpratni par pierādījuma nepieciešamību, pilnveidot prasmi pierādīšanai lietojot matemātiskās indukcijas principu.

Izpratne par virknēm ir ieguldījums turpmākajā izglītībā (kad būs nepieciešams apgūt robežas, rindas), radot priekšstatu par bezgalīgas virknes summas aprēķināšanas iespēju.

Izmantojot bezgalīgi dilstošas ģeometriskas progresijas summas formulu, var pāriet no skaitļa pieraksta bezgalīgas periodiskas decimāldaļas formas uz parasto daļu. Virkņu saistību ar citiem matemātikas un ne tikai matemātikas jautājumiem var akcentēt, demonstrējot Zelta griezumu un Fibonači virkni.

Temata apgūvē ir būtiskas skolēnu iepriekšējās zināšanas, pieredze, intuīcija. Akcentējot prasmi saskatīt likumsakarības, jānorāda, ka dažu virknes pirmo locekļu apskatīšana neļauj neko apgalvot par virknes veidošanas vispārīgo likumu, tā būs tikai hipotēze.



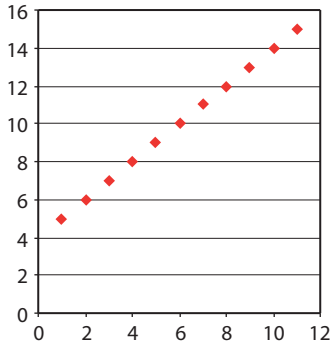
C E Ļ V E D I S



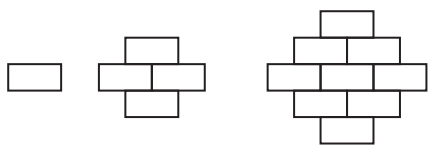
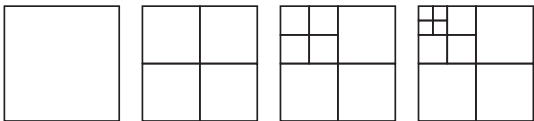
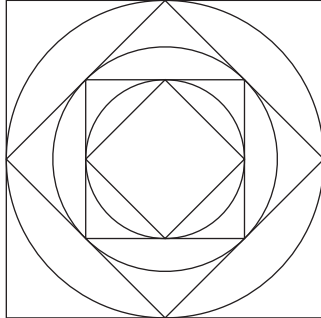
Galvenie skolēnam sasniedzamie rezultāti

| STANDARTĀ | Izprot funkcijas un ar to saistītos jēdzienus; lieto dažādus funkcijas uzdošanas veidus; pazīst lineāru funkciju, kvadrātfunkciju, pakāpes funkciju ar veselu kāpinātāju, eksponentfunkciju, logaritmisko funkciju, trigonometriskās funkcijas, virkni kā naturāla argumenta funkciju. | Lieto dažādus spriedumu iegūšanas veidus (empīrisko, induktīvo, deduktīvo); vispārina, klasificē, saskata analogijas, novērtē procesu tendences. | Izprot pierādījuma nepieciešamību, būtību un struktūru, lieto dažādus pierādījumu veidus. | Izprot matemātikas kā zinātnes attīstības tendences un novērtē matemātikas svarīgāko sasniegumu nozīmi sabiedrības attīstībā, nosaucot piemērus. |
|-----------|---|--|---|--|
| PROGRAMMĀ | <ul style="list-style-type: none"> Izprot skaitļu virknes jēdzienu, virknes uzdošanas veidus (aprakstoši, ar vispārīgā locekļa formulu, rekurenti), lieto atbilstošo simboliku. Uzraksta virknes locekļus, ja dota virknes vispārīgā locekļa formula, virkne uzdota rekurenti vai aprakstoši. | <ul style="list-style-type: none"> Saskata likumsakarības un izsaka hipotēzi par virknes nākamo locekli, par virknes uzdošanu rekurenti vai virknes vispārīgā locekļa formulu, par virknes locekļu summu. | <ul style="list-style-type: none"> Pierāda virknes n-tā locekļa formulu un pirmo n locekļu summas formulu, izmantojot matemātisko indukciju. | <ul style="list-style-type: none"> Analizē virkņu saistību ar citiem matemātikas jautājumiem (Fibonači virkne un Zelta griezum, virkne $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ un skaitlis e). |
| STUNDĀ | <p>Vizualizēšana. Darbs ar tekstu. <i>SP. Virknes jēdziens.</i></p> <p><i>KD. Virknes pieraksts.</i></p> | <p>Izpēte. <i>LD. Virknes.</i></p> | <p><i>KD. Formulas pierādīšana.</i></p> | <p><i>VM. Zelta griezums</i> <i>VM. Fibonači virkne.</i> <i>VM. Koha sniegpārslīņa.</i></p> |

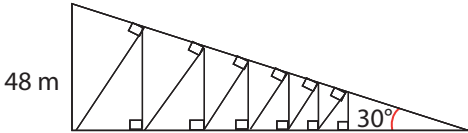
UZDEVUMU PIEMĒRI

| Sasniedzamais rezultāts | I | II | III |
|--|--|--|---|
| Izprot skaitļu virknes jēdzienu, virknes uzdošanas veidus (aprakstoši, ar vispārīgā locekļa formulu, rekurenti), lieto atbilstošo simboliku. | <p>1. Ar kuru no formulām ir definēta virkne?</p> <p>a) $a_n=2n-5, n \in R$</p> <p>b) $a_n=2n-5, n \in N$</p> <p>c) $a_n=2n-5, n \in Z$</p> <p>2. Kuras no kopām var būt virknes definīcijas apgabals?</p> <p>a) Z</p> <p>b) N</p> <p>c) R</p> <p>d) $\{1;2;3;4;5\}$</p> <p>3. Kā katrā no gadījumiem ir definēta virkne (aprakstoši, ar vispārīgā locekļa formulu, rekurenti)?</p> <p>a) $a_n=2n+3, n \in N$</p> <p>b) Virkni veido visi pirmskaitļi, sakārtoti augošā secībā.</p> <p>c) $a_1=2, a_{n+1}=a_n+4, n \in N$</p> | <p>1. Virkni a_n veido visi skaitļa 3 dalāmie augošā secībā. Nosaki virknes pirmos trīs locekļus! Definē šo virkni rekurenti! Uzraksti virknes vispārīgā locekļa formulu!</p> <p>2. Izveido četras dažādas virknes, kurām pirmie divi locekļi ir skaitļi 1 un 4! Apraksti ar vārdiem likumsakarības, pēc kurām veidoji šīs virknes!</p> <p>1;4;...</p> <p>1;4;...</p> <p>1;4;...</p> <p>1;4;...</p> | <p>1. Izveido divas tādas skaitļu virknes, lai to definīcijas apgabali sakristu, bet vērtību apgabali nesakristu, pie tam, vienas virknes vērtību apgabals būtu otras virknes vērtību apgabala apakškopa!</p> <p>2. Dota virkne 2; 4; 6; 8;... . Vai virkne ir definēta viennozīmīgi? Atbildi pamato!</p> |
| Uzraksta virknes locekļus, ja dota virknes vispārīgā locekļa formula, virkne uzdota rekurenti vai aprakstoši. | <p>1. Pabeidz teikumu!</p> <p>a) Virkne uzdota ar vispārīgā locekļa formulu. Lai aprēķinātu virknes trešo locekli, vispārīgā locekļa formulā</p> <p>.....</p> <p>b) Virkne (a_n) uzdota rekurenti $a_1=2, a_{n+1}=a_n+3, n \in N$. Lai aprēķinātu šīs virknes divdesmit septīto locekli, ir jāzina šīs virknes</p> <p>.....</p> <p>2. Uzraksti virkņu (a_n) un (x_n) pirmos 3 locekļus!</p> <p>a) $a_n = \frac{2n}{n+1}, n \in N$</p> <p>b) $x_n=4, n \in N$</p> | <p>1. Augošas virknes (a_n) locekļi ir visi tie naturālie skaitļi, kurus dalot ar 5, atlikumā iegūst 3. Uzraksti pirmos četrus šīs virknes locekļus, trīspadsmito un divdesmit pirmo šīs virknes locekli!</p> <p>2. Uzraksti pirmos četrus dotās virknes locekļus!</p> <p>a) $a_1=2, a_{n+1}=a_n+5, n \in N$</p> <p>b) $a_1=1, a_2=-4, a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n, n \in N$</p> | <p>Virknes (a_n) un (b_n) definētas visiem naturālajiem skaitļiem. Virkne (a_n) uzdota rekurenti, bet virkne (b_n) ar vispārīgā locekļa formulu. Izvērtē šo virkņu divdesmitā locekļa skaitliskās vērtības aprēķināšanas gaitu!</p> |

| Sasniedzamais rezultāts | I | II | III |
|---|--|--|--|
| Atšķir augošas, dilstošas, maiņzīmju, nemainīgas, galīgas, bezgalīgas virknes. | <p>1. Uzraksti galīgas dilstošas virknes piemēru!</p> <p>2. Pabeidz iesāktos teikumus! Aritmētiskā progresija ir augoša, ja tās diference ir</p> <p>Ģeometriskā progresija ir dilstoša, ja tās kvocients ir</p> <p>Aritmētiskā progresija ir nemainīga virkne, ja tās diference ir</p> | <p>Raksturo dotās virknes, lietojot jēdzienus augoša vai dilstoša, maiņzīmju, galīga vai bezgalīga, nemainīga!</p> <p>a) $b_n = \frac{1}{n}, n \in N$</p> <p>b) Visu trīsciparu skaitļu virkne, kuras locekļi sakārtoti augošā secībā.</p> <p>c) $a_n = n^0, n \in N$</p> <p>d) $x_n = (-1)^n, n \in N$</p> | <p>Dota virkne $a_n = \frac{n+2}{n+5}, n \in N$.</p> <p>a) Izsaki hipotēzi par to, vai virkne ir augoša vai dilstoša!</p> <p>b) Formulē faktu, kas būtu jāpierāda, lai pamatotu, ka virkne $a_n = \frac{n+2}{n+5}, n \in N$ ir augoša!</p> |
| Lieto virknes grafiku. | <p>Dots virknes grafiks. Nosaki: šīs virknes devīto locekli, kārtas numuru virknes loceklim, kura skaitliskā vērtība ir 9!</p>  | <p>1. Virknes (a_n) visi locekļi ar nepāra kārtas numuriem ir -1, bet locekļi ar pāra kārtas numuriem ir 0. Attēlo šo virkni grafiski, atliekot pirmos sešus locekļus!</p> <p>2. Ģeometriskās progresijas pirmais loceklis ir 8, bet kvocients $\frac{1}{2}$. Attēlo to grafiski, atliekot vismaz piecus punktus!</p> | <p>1. Nekonstruējot grafikus, raksturo virknes $a_n = n^2 - 5$ un funkcijas $y = x^2 - 5$ grafikus!</p> <p>2. Nosaki virknes $a_n = n^2 - 20n + 120$ mazāko locekli! Atbildi pamato!</p> <p>3. Ģeometriskās progresijas pirmais loceklis ir 8, bet kvocients $\frac{1}{2}$. Attēlo to grafiski, atliekot vismaz piecus punktus! Uzraksti formulu eksponentfunkcijai, kuras grafikam pieder visi šīs progresijas punkti!</p> |
| Pāriet no skaitļa pieraksta bezgalīgas periodiskas decimāldaļas formā uz parasto daļu, izmantojot bezgalīgi dilstošas ģeometriskas progresijas summas formulu. | <p>Dota virkne $0,4; 0,04; 0,004, \dots$, kuras katrs nākamais loceklis ir 10 reižu mazāks nekā iepriekšējais.</p> <p>a) Pamato, ka dotā virkne ir bezgalīgi dilstoša ģeometriskā progresija!</p> <p>b) Skaitli $0,(4)$ uzraksti kā summu, kuras saskaitāmie ir dotās virknes locekļi!</p> <p>c) Ar bezgalīgi dilstošas ģeometriskās progresijas summas formulu aprēķini dotās virknes visu locekļu summu!</p> <p>d) Uzraksti skaitli $0,(4)$ kā parasto daļu!</p> | <p>Pārveido skaitli $0,(62)$ par parasto daļu, izmantojot bezgalīgi dilstošas ģeometriskās progresijas summas formulu!</p> | <p>Pārveido skaitli $2,(6)$ par parasto daļu: izmantojot bezgalīgi dilstošas ģeometriskās progresijas summas formulu; apzīmējot doto skaitli ar x un apskatot tā decimālos daudzkārtņus $10x, 100x, \dots$ Novērtē, kurš no paņēmieniem tev šķiet racionālāks!</p> |

| Sasniedzamais rezultāts | I | II | III |
|--|---|--|---|
| <p>Lieto jēdzienus – <i>virtnes n-tais loceklis, pirmo n locekļu summa, aritmētiskā un ģeometriskā progresija, diference, kvocients</i>, – formulējot reālus, sadzīviskus faktus, procesus matemātiskā valodā.</p> | <p>Virtni veido augoša secībā sakārtoti skaitļa 5 dalāmie. Raksturo virtni, lietojot jēdzienus: pirmais loceklis, n – tais loceklis, progresija, augoša, dilstoša, galīga, bezgalīga, diference!</p> | <p>Amfiteātri ir 10 rindas, katrā nākamajā rindā ir par 20 vietām vairāk nekā iepriekšējā rindā. Pēdējā rindā ir 280 vietu. Apraksti šo situāciju, lietojot ar virtnēm saistītus matemātiskus jēdzienus!</p> | <p>2000. gadā firmas peļņa bija Ls 50 000. Laikā no 2000. gada līdz 2006. gadam firmas peļņa katru gadu pieauga par 10 %, salīdzinājumā ar iepriekšējo gadu. Apraksti šo situāciju, lietojot ar virtnēm saistītus matemātiskus jēdzienus!</p> |
| <p>Raksturo grafiskos attēlos ietverto informāciju ar skaitļu virtnēm (piemēram, zīmējumā attēloto figūru perimetru vai laukumu skaitliskās vērtības veido virtni).</p> | <p>Figūras tiek veidotas, ievērojot noteiktu likumsakarību. Izsaki hipotēzi par nākamā figūru un uzzīmē to! "Ķieģeļu" skaitu figūrās raksturo ar skaitliskas virtnes palīdzību!</p> <p>a)</p>  <p>b)</p>  <p>c)</p>  | <p>Dots kvadrāts. Tas tiek sagriezts četros vienādos kvadrātos, viens no iegūtajiem kvadrātiem atkal tiek sagriezts četros vienādos kvadrātos, viens no iegūtajiem kvadrātiem atkal tiek sagriezts četros vienādos kvadrātos utt. (zīm.). Raksturo kvadrātu skaitu kā skaitlisku virtni! Definē šo virtni rekurenti un ar vispārīgā locekļa formulu!</p>  | <p>1. Dots kvadrāts, kura malas garums ir 1 vienība. Pirmajā solī ar nogriezni savieno divu pretējo malu viduspunktus un iekrāso pusi no laukuma. Nākamajā solī ar nogriezni savieno neiekrašotās daļas pretējo malu viduspunktus un iekrāso pusi no vēl neiekrašotā laukuma, utt. Katrā solī iekrāsoto laukumu pieraksti kā skaitli! Aprēķini, kāds laukums ir iekrāsots pēc pieciem soļiem, un kāds – pēc astoņiem soļiem! Ko tu vari secināt, ja krāsošana turpinās bezgalīgi?</p> <p>2. Kvadrātā, kura malas garums 12 cm, ievilkta riņķa līnija, riņķa līnijā ievilkts kvadrāts, kvadrātā ievilkta riņķa līnija utt. Šis process tiek turpināts bezgalīgi. Saskati trīs ģeometriskās progresijas, ar kuru palīdzību var skaitliski raksturot šo procesu! Divām no šīm virtnēm aprēķini pirmos trīs locekļus!</p>  |

| Sasniedzamais rezultāts | I | II | III |
|---|--|---|--|
| Saskata likumsakarības un izsaka hipotēzi par virknes nākamo locekli, par virknes uzdošanu rekurenti vai virknes vispārīgā locekļa formulu, par virknes locekļu summu. | <p>Saskati likumsakarību, pēc kuras veidota dotā virkne! Izsaki hipotēzi par virknes nākamo locekli un n-to locekli!</p> <p>a) 1; 4; 9; 16; 25; ...</p> <p>b) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots$</p> <p>c) $\frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{4}{7}; \frac{8}{9}; \dots$</p> | <p>Doti virknes pirmie trīs locekļi 2; 6; 18; ...</p> <p>Saskati vismaz divas likumsakarības, pēc kurām varētu būt veidota dotā virkne! Apraksti šīs likumsakarības, saskaņā ar katru no tām uzraksti nākamo virknes locekli un izsaki hipotēzi par n-to locekli vai definē aprakstīto likumsakarību rekurenti!</p> | <p>1. Izsaki hipotēzi par virknes $0; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \dots$ vispārīgā locekļa formulu!</p> <p>2. Dota virkne (a_n), kas definēta rekurenti: $a_1=3, a_{n+1}=2a_n$. Izsaki hipotēzi par šīs virknes vispārīgā locekļa formulu! Pierādi to ar matemātisko indukciju!</p> |
| Pierāda virknes n-tā locekļa formulu un pirmo n locekļu summas formulu, izmantojot matemātisko indukciju. | <p>Dots, ka (a_n) ir aritmētiskā progresija ar diferenci d. Izmantojot matemātiskās indukcijas principu, pierādi, ka visiem, $n \in \mathbb{N}$ ir spēkā formula $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$!</p> | <p>Izmantojot matemātiskās indukcijas principu, pierādi ģeometriskās progresijas:</p> <p>a) n-tā locekļa formulu;</p> <p>b) pirmo n locekļu summas formulu!</p> | <p>Dota nepāra skaitļu virkne. Izsaki hipotēzi par šīs virknes pirmo n locekļu summas formulu! Pierādi to ar matemātisko indukciju!</p> |
| Izmanto IT, aprēķinot virknes locekļus, pirmo n locekļu summu. | <p>Virkne (a_n) uzdots ar vispārīgā locekļa formulu $a_n = \ln(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Nosaki pirmos 10 locekļus, un uzzīmē šīs virknes grafiku, izmantojot lietojumprogrammu <i>Excel</i>!</p> | <p>Stāsta, ka Indijas karalis ļāvis šaha spēles izgudrotājam pieprasīt no karaļa jebkuru atalgojumu. Spēles izgudrotāja lūgums bija visai dīvains: uz šaha galda pirmā lauciņa novietot 1 kviešu graudu, uz otrā divreiz vairāk jeb 2 graudus, uz trešā – atkal 2 reizes vairāk nekā uz otrā jeb 4 graudus, utt. līdz pēdējam 64. lauciņam. Protams, par tādu "nieka" lūgumu karalis tikai pasmaidījis, bet, kad viņa kalpi sākuši lūgumu izpildīt, atklājies, ka tik daudz kviešu graudu nav pat visā Indijā. Aprēķini pieprasīto graudu skaitu!</p> | <p>Izlasi doto tekstu (M_10_UP_06_P1)! Atrodi nepieciešamo rindas locekļu skaitu, lai iegūtu skaitļa π vērtību, ar precizitāti līdz tūkstošdaļām, ar Leibnica rindas palīdzību un ar 1995. gadā atklātā algoritma palīdzību!</p> |

| Sasniedzamais rezultāts | I | II | III |
|--|--|---|--|
| <p>Izmanto zināšanas par virknēm, atrisinot praktiskus uzdevumus.</p> | <p>1. Izvēloties mobilā telefona programmu "Sazvanīsimies", abonentam pirmajā mēnesī nav jāmaksā par 5 sarunas minūtēm, bet katrā nākamajā mēnesī bezmaksas sarunu laiks tiek palielināts par 30 sekundēm. Cik bezmaksas sarunu minūšu abonentam būs pēc gada?</p> <p>2. Sienas pulkstenis pusstundās sit tikai vienu reizi, bet pilnās stundās sit pilnu stundu skaitu. Cik reizes diennaktī sit sienas pulkstenis?</p> | <p>Zīmējumā attēlota metāla konstrukcija. Aprēķini otra īsākā vertikālā balsta garumu!</p>  | <p>1. No fizikas kursa zināms, ka vienmērīgi paātrinātā kustībā (formula $s = \frac{at^2}{2}$) ir spēkā šāds fakts: viens otram sekojošos vienādos laika intervālos veikto attālumu attiecība ir 1:3:5:7: ... Pamato to!</p> <p>2. Izlasi tekstu! <i>Ņūtons ir formulējis atdzišanas likumu. Ja t_0 ir objekta temperatūra pie vides temperatūras R, tad objekta temperatūra t_n pēc n minūtēm, ir aprēķināma no rekurenti definētas vienādošanas $t_n - t_{n-1} = k(t_{n-1} - R)$, kur k – proporcionalitātes koeficients.</i> Izmantojot šo likumu, atrisini uzdevumu! Krūzīti ar kafiju, kuras temperatūra ir 98°C, ienesa istabā, kuras temperatūra 18°C, un pēc vienas minūtes kafija atdzisa līdz 94°C. Aprēķini proporcionalitātes koeficientu un kafijas temperatūru pēc 5 minūtēm!</p> |
| <p>Analizē virkņu saistību ar citiem matemātikas jautājumiem (Fibonači virkne un Zelta griezumums, virkne $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ un skaitlis e).</p> | <p>Dotas skaitliskas izteiksmes: $\sin 30^\circ$, $\sin 45^\circ$, $\sin 60^\circ$, $\sin 90^\circ$. Pārveido doto izteiksmju vērtības formā $\frac{\sqrt{n}}{m}$, kur $n, m \in \mathbb{N}$!</p> | <p>1. Regulāriem n-stūriem ir spēkā formula $a_n = 2R \cdot \sin \frac{\pi}{n}$, kur a_n ir n-stūra malas garums un R ir ap n-stūri apvilktās riņķa līnijas rādiuss. Šo formulu var uzskatīt par kādas virknes vispārīgā locekļa formulu.</p> <p>a) Apraksti, kas veido šo virkni! b) Nosaki šīs virknes definīcijas apgabalu! c) Aprēķini šīs virknes pirmos trīs locekļus! d) Raksturo šīs virknes īpašības!</p> <p>2. Virkne (a_n) uzdots ar vispārīgā locekļa formulu $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Aprēķini šīs virknes pirmos astoņus, piecdesmito un simto locekli, izmantojot IT! Izvērtē iegūtos rezultātus un prognozē, kādam skaitlim tuvosies virknes locekļu vērtības, palielinot n!</p> | <p>Matemātikā īpašu vietu ieņem Fibonači virkne. Tā tiek definēta šādi: virknes pirmie divi locekļi ir 1 un katrs nākamais virknes loceklis tiek iegūts, saskaitot divus iepriekšējos. Animācijā (M_10_UP_06_VM1) tiek demonstrēts Fibonači virknes "ģeometriskais modelis". Noteiktā veidā definētām Fibonači virknes locekļu attiecībām ir saistība ar Zelta griezumumu (ja nepieciešams, noskaidro šī jēdziena saturu). Vēro animāciju, veic aprēķinus un izvirzi hipotēzi par to, kāda ir šī saistība!</p> |

STUNDAS PIEMĒRS

VIRKNES JĒDZIENS

Mērķis

Pilnveidot izpratni par skaitļu virkni, iegūstot un atbilstoši uzdevumam izmantojot tekstā atrodamo informāciju.

Skolēnam sasniedzamais rezultāts

- Ir sistematizējis iepriekšējās zināšanas par virknēm, zina virknes definīciju un īpašības.
- Iegūst un salīdzina informāciju par virknēm dažādos avotos.

Nepieciešamie resursi

Divi dažādi informācijas avoti – kāda no mācību grāmatām vai rokasgrāmatām, kurā ir pamatinformācija par virknēm, vai sagatavota teksta lapa katram skolēnam. *Kā vienu no avotiem var izmantot grāmatu J.Buls "Virknēs" tekstu 23.-27.lpp (Tautsaimniecības Pētniecības institūts, Rīga: 1994.- 54 lpp.).*

Mācību metodes

Vizualizēšana, darbs ar tekstu.

Mācību organizācijas formas

Frontāls darbs, individuāls darbs, pāru darbs.

Vērtēšana

Skolēni novērtē atrastās informācijas pareizību un precizitāti, apspriežoties pāros, skolēniem tiek dota iespēja salīdzināt stundā apgūto ar iepriekš zināto; skolotājs novērtē skolēnu izpratni, klausoties jēdzienu skaidrojumus, kā arī pēc neskaidro jautājumu daudzuma un būtības, skolotājs nepieciešamības gadījumā var iepazīties ar skolēna veidoto jēdzienu sarakstu un tabulu.

Skolotāja pašnovērtējums

Secina par stundas mērķa sasniegšanu, izmantotās metodes lietderību un efektivitāti, par to, kas izdevās un kādiem jautājumiem būtu jāpievērš lielāka uzmanība.

Stundas gaita

| Skolotāja darbība | Skolēnu darbība |
|---|--|
| Vizualizēšana (10 minūtes) | |
| Aicina skolēnus veidot tādu vārdu (vārdu savienojumu) sarakstu, kas viņam asociējas ar jēdzienu <i>virksne</i> ; uzdevums veicams individuāli, rakstot vārdus stabiņā vienu zem otra. | Individuāli veido vārdu sarakstu, kas asociējas ar virknes jēdzienu. |
| Piedāvā veidot uz tāfeles (vai uz lielformāta lapas, kas tiks izmantota visu temata apguves laiku) domu karti, pierakstot skolēnu nosauktos jēdzienus. Pieraksta, ja nepieciešams, virza, precizē, pārjautā. Piedāvā turpmāko temata apguves secību, pamatojoties uz izveidoto shēmu (varbūt to jau nedaudz papildinot), šajā stundā dodot uzdevumu precizēt virknes jēdzienu un noskaidrot svarīgākās virkņu īpašības. | Sauc jēdzienus, piedāvā jēdzienu sistematizēšanas variantus, cenšas grupēt, katrai grupai nosakot vienojošo jēdzienu, pamato savu viedokli, papildina. Novērtē savas priekšzināšanas par tematu, shēmā norādot vietas, kur būtu nepieciešama papildinformācija, precizēšana, ko būtu interesanti noskaidrot. |

Aprēķinu veikšana, iegūto rezultātu reģistrēšana

Pirms tabulas aizpildīšanas skolotājs ar skolēniem vienojas par skaitļa π pieraksta formu; šajā gadījumā nav vēlams to aizstāt ar kādu tuvinājumu.

Spirāli veidojošo loku rādiusi, loku garumi un spirāles garums dažādam loku skaitam

| Loka kārtas numurs | Loka rādiuss (cm) | Loka garums (cm) | Spirāles garums, ja dotais loks ir pēdējais (cm) |
|--------------------|-------------------|------------------|--|
| | 12 | 12π | |
| | 6 | 6π | 18π |
| | 3 | 3π | 21π |
| | 1,5 | $1,5\pi$ | $22,5\pi$ |
| | 0,75 | $0,75\pi$ | $23,25\pi$ |
| | 0,375 | $0,375\pi$ | $23,625\pi$ |
| | 0,1875 | $0,1875\pi$ | $23,8125\pi$ |
| | | $0,09375\pi$ | $23,90625\pi$ |
| | | $0,046875\pi$ | $23,953125\pi$ |
| | | $0,0234375\pi$ | $23,9765625\pi$ |

Loku garumi veido ģeometrisku progresiju, kuras pirmais loceklis ir 12π un kvocients 0,5.

Hipotēze

Spirāles garuma skaitliskā vērtība (centimetros) tiecas uz 24π .

Hipotēzes pierādījums

Pierādījumu skolēni veic ar skolotāja palīdzību. Skolēniem nav jālieto simboliskais pieraksts, pietiek, ja situāciju raksturo ar vārdiem “kļūst, tiecas, gandrīz” un tml.

Loku rādiusi un līdz ar to loku garumi veido dilstošu ģeometrisku progresiju, kuras $q=0,5$. Ģeometriskās progresijas pirmo n locekļu summas formula:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}. \text{ Ja } n \rightarrow \infty \text{ (ir ļoti liels) un } q \text{ - konstants, pie tam } |q| < 1, \text{ tad } q^n \rightarrow 0,$$

$$1-q^n \rightarrow 1 \text{ un } S_n \rightarrow \frac{a_1}{1-q}. \text{ Tāpēc } S = \frac{a_1}{1-q}, \text{ kur } S \text{ ir bezgalīgi dilstošas ģeometriskās}$$

progresijas locekļu summa. Konkrētajā situācijā $a_1=12\pi$ (cm) un $q=0,5$, tāpēc

spirāles garums (centimetros) tieksies uz $24\pi \approx 75,4$ (cm).

Rezultātu analīze, izvērtējums, secinājumi

Pēc hipotēzes pierādīšanas skolēni tiek aicināti uzdot jautājumus gan par pierādījumu, gan par darbu kopumā. Skolotājs skolēnu uzdotos jautājumus var izmantot refleksijas fāzē. Ja skolēni paši neuzdod jautājumus, skolotājs aicina viņus atbildēt uz jautājumiem:

1. Vai līdz šim matemātikā esi sastapies ar jēdzieniem: “bezgalība, tiecas” vai situācijām: “tiecas, bet nepārsniedz; pievienojot summai bezgalīgi daudz saskaitāmos, summas skaitliskā vērtība nekļūst bezgalīgi liela”?
2. Vai ir palikušas neskaidrības par izvirzīto hipotēzi, pierādījuma nepieciešamību, pašu pierādījumu?

IRACIONĀLA SKAITĻA π APTUVENĀS VĒRTĪBAS NOTEIKŠANA

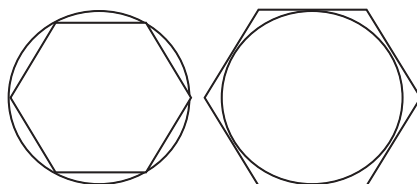
Uzdevums

Izlasi doto tekstu! Atrodi nepieciešamo rindas locekļu skaitu, lai iegūtu skaitļa π vērtību ar precizitāti līdz tūkstošdaļām ar Leibnica rindas palīdzību un ar 1995.gadā atklātā algoritma palīdzību!

Matemātikā dažādu lielumu apzīmēšanai lieto burtus. Grieķu alfabēta burtu π matemātikā lieto kā skaitļa apzīmējumu. Kā zināms, ģeometrijā skaitli π definē kā riņķa līnijas garuma un diametra attiecību. Taču skaitli π plaši izmanto arī citās matemātikas nozarēs. Skaitlis π ir iracionāls.

Arhimēds skaitli π aptuveni novērtēja ar $\frac{2}{7}$, senie ķīniešu matemātiķi ar $\frac{355}{113}$.

Iespējams, ka Arhimēds bija pirmais zinātnieks, kas ierosināja aprēķināt skaitli π , izmantojot matemātiskas metodes. Šai nolūkā viņš ievilka riņķa līnijā un apvilka ap riņķa līniju regulārus daudzstūrus.



Viņš pieņēma, ka riņķa līnijas diametrs ir 1 (viena vienība). Tāpēc ievilktā daudzstūra perimetrs ir riņķa līnijas garuma jeb skaitļa π novērtējums ar iztrūkumu, bet apvilktā daudzstūra perimetrs ir skaitļa π novērtējums ar uzviju. Piemēram, ja ievilka riņķa līnijā un apvelk ap riņķa līniju regulāru sešstūri un aprēķina to perimetrus, tad iegūst šādu novērtējumu: $3 < \pi < 2\sqrt{3}$. Aprēķinot ievilktā un apvilktā regulāra 96-stūra perimetrus, Arhimēds ieguva šādu novērtējumu: $3\frac{1}{7} < \pi < 3\frac{10}{71}$.

17. gadsimtā matemātiķi atklāja, ka skaitli π var aprēķināt, izmantojot rindas. Rinda ir bezgalīga summa $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$, kur $u_1; u_2; u_3; \dots; u_n \dots$ ir rindas locekļi. Daudzpunkte rindas beigās nozīmē, ka šai izteiksmei nav pēdējā saskaitāmā. Ja mēs saskaitām galīgu skaitu rindas locekļu, mēs allaž iegūstam skaitlisku rezultātu. Taču pilnīgi visus rindas locekļus nespēj saskaitīt ne cilvēks, ne dators.

Vācu matemātiķis Leibnics skaitļa π vērtības tuvinātai aprēķināšanai izmantoja šādu rindu:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots + (-1)^k \frac{1}{2k+1} \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Ir skaidrs, ka jo vairāk rindas locekļu saskaitīs, jo aprēķini būs precīzāki.

Rindu var pierakstīt arī īsi, ja izmanto simbolu \sum (grieķu burts "sigma", pirmais burts vārdā "summa"). Simbolu $\sum_{k=1}^{\infty}$ lasa: summa, ja k mainās no 1 līdz bezgalībai. Iepriekš doto Leibnica rindu īsāk var pierakstīt: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \dots = \frac{\pi}{4}$.

Gadu gaitā matemātiķi ir atraduši daudzus algoritmus, kas ātri nonāk pie vēlamā rezultāta. 1995. gadā zinātnieku grupa (*D.H.Bailey, P.Borwein un S.Plouffe*) atklāja šādu veiksmīgu skaitļa π aprēķināšanas rindu:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right).$$

$$\pi = 1 \left(\frac{4}{1} - \frac{2}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{16} \left(\frac{4}{9} - \frac{2}{12} - \frac{1}{13} - \frac{1}{14} \right) + \frac{1}{256} \left(\frac{4}{17} - \frac{2}{20} - \frac{1}{21} - \frac{1}{22} \right) + \dots + \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right) \dots$$

Vārds

uzvārds

klase

datums

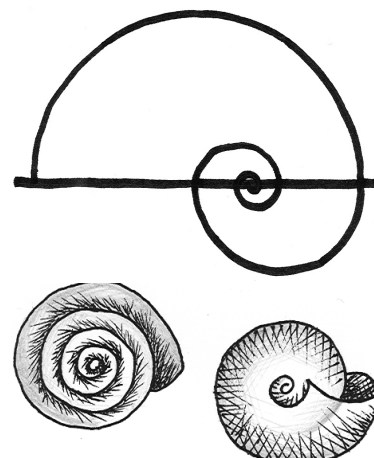
VIRKNES

Situācijas apraksts

Uzmanīgi vērojot apkārtni, varam saskatīt dažādus objektus, kuriem ir spirālveida forma, piemēram, gliemežnīca (skt. attēlu).

Mūsu izpētes objekts ir spirāle, kas sastāv no pusriņķa līniju lokiem. Pirmā (lielākā) pusloka rādiuss ir 12 cm. Katram nākamajam puslokam rādiuss ir divas reizes mazāks. Zīmējumā ir redzami spirāles pirmie 6 loki. Teorētiski spirāles loku skaits nav ierobežots (ir bezgalīgi liels).

Nepieciešams praktiski izveidot – izlocīt no stieples, šādu spirāli ar ļoti lielu loku skaitu (pieņemsim, ka tas ir iespējams). Stieplei nevajadzētu būt ne par garu, ne par īsu.



Pētāmā problēma

Cik gara stieple nepieciešama, lai varētu izlocīt šādu spirāli?

Darba gaita

1. Aprēķini zīmējumā redzamo sešu loku un nākamā (vēl neuzzīmētā) loka rādiusus un loku garumus!
Rezultātus ieraksti tabulā!
2. Nosaki spirāles garumu, ja to veido pirmie divi, pirmie trīs, ..., pirmie septiņi loki, un rezultātus ieraksti tabulā!
3. Izpēti virkni, ko veido loku garumi, un ieraksti tabulā 8., 9. un 10. loka garumu!
4. Aprēķini spirāles garumu, ja to veidotu pirmie astoņi, pirmie deviņi un pirmie desmit loki!
5. Nosaki veidu virknei, ko veido loku garumi, šīs virknes raksturojošos lielumus!
6. Izvirzi pieņēmumu/hipotēzi par spirāles garumu, ja loku skaits neierobežoti pieaug!

Aprēķinu veikšana, iegūto rezultātu reģistrēšana

Vieta aprēķiniem

Spirāli veidojošo loku rādiusi, loku garumi un spirāles garums dažādam loku skaitam

| Loka kārtas numurs | Loka rādiuss (cm) | Loka garums (cm) | Spirāles garums, ja dotais loks ir pēdējais (cm) |
|--------------------|-------------------|------------------|--|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Virkne, ko veido loku garumi ir ...

Hipotēze

Hipotēzes pierādījums

Rezultātu analīze, izvērtējums, secinājumi

| Skolotāja darbība | Skolēnu darbība | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|----------------------|------------------|----------------------|------------|--|--|----------|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Darbs ar tekstu (22 minūtes) | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>Aicina izlasīt tekstu par virknēm. Katrs skolēns no pāra lasa savu tekstu. Uzdod tekstā atrast virknes definīciju un virkņu īpašības. Lūdz aizpildīt tabulu.</p> <p><i>Var piedāvāt citu teksta strukturēšanas veidu, piemēram, tabulu ar citām ailēm: "Jau zināju, lasot uzzināju, palika neskaidrs".</i></p> | <p>Individuāli lasa tekstu, aizpilda tabulu ar tekstā atrastajiem skaidrojumiem un saviem komentāriem vai jautājumiem, ja kaut kas palicis neskaidrs vai par ko tekstā nav minēts.</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 30%;"></th> <th style="width: 35%;">Tekstā atrastais</th> <th style="width: 35%;">Jautājumi, komentāri</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Definīcija</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Īpašības</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> | | Tekstā atrastais | Jautājumi, komentāri | Definīcija | | | Īpašības | | | | | | | | |
| | Tekstā atrastais | Jautājumi, komentāri | | | | | | | | | | | | | | |
| Definīcija | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Īpašības | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>Uzaicina aizpildītās tabulas salīdzināt pāros, censties precizēt to, kas katram bija palicis neskaidrs.</p> <p>Aicina uzdot jautājumus, kas pēc apspriešanās pāros palikuši neskaidri. Lūdz skolēnus, kuri to sapratuši, izskaidrot pārējiem. Ja kāds jēdziens ir neskaidrs lielākajai skolēnu daļai, tad to izskaidro pats.</p> <p>Mudina pārdomāt un noformulēt atbildes jautājumiem: "Kas ir virkne, kādas ir virkņu būtiskākās īpašības?" Pēc brīža pats sniedz korektu atbildi, demonstrējot iepriekš sagatavotu materiālu.</p> | <p>Pārī izrunā, kas jau bija zināms, ko uzzināja no jauna, kādi jautājumi palika neskaidri, salīdzina skaidrojumus abos avotos.</p> <p>Uzdod jautājumus. Saņem atbildes uz neskaidrajiem jautājumiem. Sniedz komentārus, skaidrojumus.</p> <p>Patstāvīgi pārdomā atbildi.</p> <p>Salīdzina savu atbildi ar skolotāja doto. Jautā, precizē, argumentē.</p> | | | | | | | | | | | | | | | |
| Vizualizēšana (8 minūtes) | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>Aicina atgriezties pie stundas pirmajā daļā izveidotās shēmas. Papildina, ja nepieciešams, koriģē.</p> <p>Aicina katru skolēnu papildināt savu stundas sākumā izveidoto sarakstu ar jēdzieniem.</p> <p><i>Ja pietrūkst laika, to lūdz izdarīt mājās.</i></p> | <p>Salīdzina iepriekšējās zināšanas ar jauniegūtajām, meklē jauno faktu, jēdzienu vietu shēmā.</p> <p>Papildina jēdzienu sarakstu.</p> | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>Uzdod mājas darbu – izlasīt otru tekstu, lai varētu izteikt viedokli par abiem tekstiem, izvērtējot to lietderību virknes jēdziena apgūšanai, intereses radīšanai u.c.</p> | <p>Atzīmē mājas darbam uzdoto.</p> | | | | | | | | | | | | | | | |

VIRKNES

Darba izpildes laiks 40 minūtes

M_10_LD_06

Mērķis

Pilnveidot prasmi veikt aprēķinus, saskatīt likumsakarību iegūtajos rezultātos, lai izvirzītu hipotēzi, tās pierādījumā iegūstot bezgalīgi dilstošas ģeometriskās progresijas locekļu summas formulu.

Sasniedzamais rezultāts

- Aprēķina riņķa līnijas loku garumus un to summas.
- Saskata, ka loku garumi veido ģeometrisku progresiju.
- Izvirza hipotēzi par loku garumu summu, to skaitam neierobežoti pieaugot.

| | |
|--|------------|
| Saskata un klasificē lielumus, formulē pētāmo problēmu | Dots |
| Veido plānu | Dots |
| Iegūst un apstrādā informāciju | Patstāvīgi |
| Formulē pieņēmumu/ hipotēzi | Patstāvīgi |
| Veic pierādījumu | Mācās |
| Analizē un izvērtē rezultātus, secina | Mācās |
| Prezentē darba rezultātus | - |
| Sadarbojas, strādājot grupā (pārī) | Mācās |

Darbu veic pirms skolēni apguvuši bezgalīgi dilstošas ģeometriskās progresijas locekļu summas formulu. Pirms pierādīšanas ieteicams pārrunāt skolēnu izvirzītās hipotēzes.

Darbs veicams pāros.

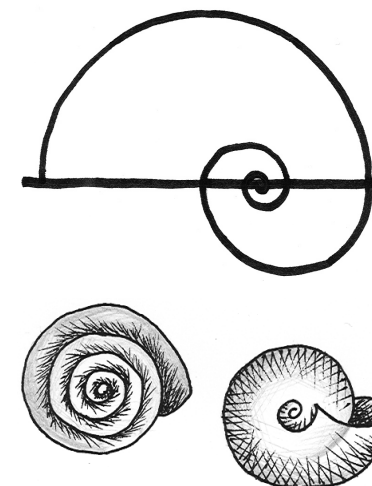
Vēlams izmantot kalkulatorus.

Situācijas apraksts

Uzmanīgi vērojot apkārtni, varam saskatīt dažādus objektus, kuriem ir spirālveida forma, piemēram, gliemežnīca (sk. attēlu).

Mūsu izpētes objekts ir spirāle, kas sastāv no pusriņķa līniju lokiem. Pirmā (lielākā) pusloka rādiuss ir 12 cm. Katram nākamajam puslokam rādiuss ir divas reizes mazāks. Zīmējumā ir redzami spirāles pirmie 6 loki. Teorētiski spirāles loku skaits nav ierobežots (ir bezgalīgi liels).

Nepieciešams praktiski izveidot – izlocīt no stieples, šādu spirāli ar ļoti lielu loku skaitu (pieņemsim, ka tas ir iespējams). Stieplei nevajadzētu būt ne par garu, ne par īsu.



Pētāmā problēma

Cik gara stieple nepieciešama, lai varētu izlocīt šādu spirāli?

Darba gaita

1. Aprēķina zīmējumā redzamo sešu loku un nākamā (vēl neuzzīmētā) loka rādiusus un loku garumus. Rezultātus ieraksta tabulā.
2. Nosaka spirāles garumu, ja to veido pirmie divi, pirmie trīs, ..., pirmie septiņi loki, un rezultātus ieraksta tabulā.
3. Izpēta virkni, ko veido loku garumi, un ieraksta tabulā 8., 9. un 10. loka garumu.
4. Aprēķina spirāles garumu, ja to veidotu pirmie astoņi, pirmie deviņi un pirmie desmit loki.
5. Nosaka veidu virknei, ko veido loku garumi, šo virkni raksturojošos lielumus.
6. Izvirza hipotēzi par spirāles garumu, ja loku skaits neierobežoti pieaug.

Vārds

uzvārds

klase

datums

VIRKNES PIERAKSTS

1. uzdevums (2 punkti)

Dota virkne $x_1=2$, $x_{n+1}=3 \cdot x_n + 1$, kur $n \in \mathbb{N}$. Uzraksti šīs virknes otro un trešo locekli!

2. uzdevums (2 punkti)

Dota virkne $y_n = \frac{n+3}{n}$, kur $n \in \mathbb{N}$. Uzraksti šīs virknes pirmos trīs locekļus!

3. uzdevums (2 punkti)

Doti virknes pirmie pieci locekļi 2; 7; 12; 17; 22; Uzraksti, kāda varētu būt virknes rekurentā formula!

4. uzdevums (2 punkti)

Virknes locekļi ir visi tie naturālie skaitļi, kurus dalot ar 4, atlikumā iegūst 3. Uzraksti pirmos četrus virknes locekļus! Uzraksti, kāda varētu būt šīs virknes vispārīgā locekļa formula!

Vārds

uzvārds

klase

datums

FORMULAS PIERĀDĪŠANA

1. uzdevums (3 punkti)

Dota virkne $a_n = 2n + 3$, kur $n \in \mathbb{N}$. Uzraksti virknes locekļus a_1, a_k, a_{k+1} !

2. uzdevums (3 punkti)

Dots, ka virknes (a_n) vispārīgā locekļa formula ir $a_n = 3n - 1$, kur $n \in \mathbb{N}$. Pamato, ka $a_{k+1} = a_k + 3$!

3. uzdevums (4 punkti)

Aritmētiskās progresijas pirmais loceklis ir 4, bet diference 3. Pierādi ar matemātisko indukciju, ka šīs virknes vispārīgā locekļa formula ir $a_n = 3n + 1$, kur $n \in \mathbb{N}$!

Vārds

uzvārds

klase

datums

VIRKNES

1. variants

1. uzdevums (3 punkti)

Virkne (a_n) ir uzdota ar vispārīgā locekļa formulu $a_n = 3n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Aprēķini šīs virknes desmito locekli!

b) Nosaki, vai skaitlis 170 pieder šai virknei!

2. uzdevums (5 punkti)

a) Izveido dilstošu aritmētisko progresiju, kuras diference ir -2 un uzraksti tās pirmos četrus locekļus!

b) Izveido augošu ģeometrisku progresiju, kuras trešais loceklis ir 10 un uzraksti tās pirmos četrus locekļus!
Norādi kvocientu!

c) Izveido virkni, kura nav ne aritmētiskā progresija, ne ģeometriskā progresija! Definē šo virkni vai nu apraksti, vai ar n -tā locekļa formulu, vai rekurenti!

3. uzdevums (3 punkti)

Virkne (x_n) ir uzdota rekurenti $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_{n+2} = x_n \cdot x_{n+1}$.

a) Aprēķini virknes (x_n) ceturto locekli!

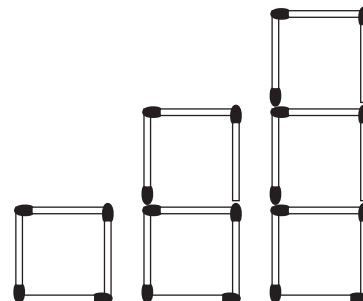
b) Nosaki visus iespējamus ciparus, ar kuriem var beigties virknes (x_n) locekļi (apgalvojums nav jāpierāda)!

4. uzdevums (3 punkti)

Pēc noteikta principa no sērkociņiem tiek veidotas figūras. Katrā nākamajā figūrā kvadrātu skaits tiek palielināts par vienu (sk. zīm.).

a) Nosaki, cik sērkociņu nepieciešams astotās figūras izveidošanai!

b) Pierakstot katras figūras veidošanai nepieciešamo sērkociņu skaitu pieaugošā secībā, iegūst virkni. Definē šo virkni rekurenti un ar n -tā locekļa formulu!

**5. uzdevums (3 punkti)**

Bišu mātēm no apaugļotajām olšūnām attīstās jaunas bišu mātes vai darba bites (darba bitēm nav pēcnācēju), no neapaugļotajām olšūnām attīstās trani. Tas nozīmē, ka traniem ir tikai viens no vecākiem – māte, bet bišu mātei ir abi vecāki – trans un māte.

a) Uzzīmē trana ciltskoku līdz piektajai paaudzei!

b) Definē rekurenti virkni, kuras pirmais loceklis ir trana senču skaits pirmajā paaudzē, otrais loceklis – trana senču skaits otrajā paaudzē utt., n -tais loceklis ir trana senču skaits n -tajā paaudzē!

6. uzdevums (5 punkti)

Dota virkne 4; 5; 7; 11; 18;..., kuras pirmais loceklis ir 4, bet katru nākamo virknes locekli iegūst, iepriekšējo reizinot ar 2 un no reizinājuma atņemot 3.

a) Andris izvirzīja hipotēzi, ka šīs virknes vispārīgā locekļa formula ir $a_n = n + 3$, kur $n \in \mathbb{N}$. Pamato, ka Andrim nav taisnība!

b) Kārlis izvirzīja hipotēzi, ka šīs virknes vispārīgā locekļa formula ir $a_n = 2^{n-1} + 3$, kur $n \in \mathbb{N}$. Pierādi to, izmantojot matemātisko indukciju!

Vārds

uzvārds

klase

datums

VIRKNES

2. variants

1. uzdevums (3 punkti)

Virkne (a_n) ir uzdota ar vispārīgā locekļa formulu $a_n = 2n + 3$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Aprēķini šīs virknes devīto locekli!

b) Nosaki, vai skaitlis 165 pieder šai virknei!

2. uzdevums (5 punkti)

a) Izveido augošu aritmētisko progresiju, kuras diference ir 7 un uzraksti tās pirmos četrus locekļus!

b) Izveido dilstošu ģeometrisku progresiju, kuras trešais loceklis ir 4 un uzraksti tās pirmos četrus locekļus!
Norādi kvocientu!

c) Izveido virkni, kura nav ne aritmētiskā progresija, ne ģeometriskā progresija! Definē šo virkni vai nu aprakstoši, vai ar n -tā locekļa formulu, vai rekurenti!

3. uzdevums (3 punkti)

Virkne (x_n) ir uzdota rekurenti $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_{n+2} = x_n \cdot x_{n+1}$.

a) Aprēķini virknes (x_n) ceturto locekli!

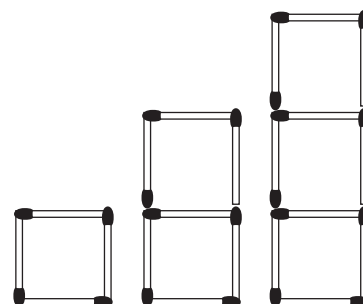
b) Nosaki visus iespējamus ciparus, ar kuriem var beigties virknes (x_n) locekļi (apgalvojums nav jāpierāda)!

4. uzdevums (3 punkti)

Pēc noteikta principa no sērkociņiem tiek veidotas figūras. Katrā nākamajā figūrā kvadrātu skaits tiek palielināts par vienu (sk. zīm.).

a) Nosaki, cik sērkociņu nepieciešams desmitās figūras izveidošanai!

b) Pierakstot katras figūras veidošanai nepieciešamo sērkociņu skaitu pieaugošā secībā, iegūst virkni. Definē šo virkni rekurenti un ar n -tā locekļa formulu!

**5. uzdevums (3 punkti)**

Bišu mātēm no apaugļotajām olšūnām attīstās jaunas bišu mātes vai darba bites (darba bitēm nav pēcnācēju), no neapaugļotajām olšūnām attīstās trani. Tas nozīmē, ka traniem ir tikai viens no vecākiem – māte, bet bišu mātei ir abi vecāki – trana un māte.

a) Uzzīmē trana ciltskoku līdz piektajai paaudzei!

b) Definē rekurenti virkni, kuras pirmais loceklis ir trana senču skaits pirmajā paaudzē, otrs loceklis – trana senču skaits otrajā paaudzē utt., n -tais loceklis ir trana senču skaits n -tajā paaudzē!

6. uzdevums (5 punkti)

Dota virkne 5; 6; 8; 12; 20, kuras pirmais loceklis ir 5, bet katru nākamo virknes locekli iegūst, iepriekšējo reizinot ar 2 un no reizinājuma atņemot 4.

a) Andris izvirzīja hipotēzi, ka šīs virknes vispārīgā locekļa formula ir $a_n = n + 4$, kur $n \in \mathbb{N}$. Pierādi, ka Andrim nav taisnība!

b) Kārlis izvirzīja hipotēzi, ka šīs virknes vispārīgā locekļa formula ir $a_n = 2^{n-1} + 4$, kur $n \in \mathbb{N}$. Pierādi to, izmantojot matemātisko indukciju!

VIRKNES

1. variants

1. uzdevums (3 punkti)

Virkne (a_n) ir uzdots ar vispārīgā locekļa formulu $a_n = 3n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.

- Aprēķini šīs virknes desmito locekli!
- Nosaki, vai skaitlis 170 pieder šai virknei!

2. uzdevums (5 punkti)

- Izveido dilstošu aritmētisko progresiju, kuras diference ir -2 un uzraksti tās pirmos četrus locekļus!
- Izveido augošu ģeometrisku progresiju, kuras trešais loceklis ir 10 un uzraksti tās pirmos četrus locekļus! Norādi kvocientu!
- Izveido virkni, kura nav ne aritmētiskā progresija, ne ģeometriskā progresija! Definē šo virkni vai nu aprakstoši, vai ar n -tā locekļa formulu, vai rekurenti!

3. uzdevums (3 punkti)

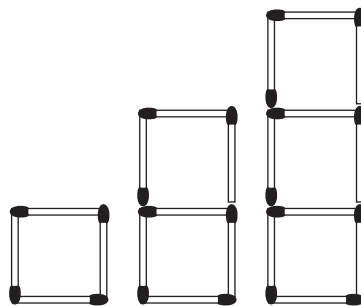
Virkne (x_n) ir uzdots rekurenti $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_{n+2} = x_n \cdot x_{n+1}$.

- Aprēķini virknes (x_n) ceturto locekli!
- Nosaki visus iespējamus ciparus, ar kuriem var beigties virknes (x_n) locekļi (apgalvojums nav jāpierāda)!

4. uzdevums (3 punkti)

Pēc noteikta principa no sērkociņiem tiek veidotas figūras. Katrā nākamajā figūrā kvadrātu skaits tiek palielināts par vienu (sk. zīm.).

- Nosaki, cik sērkociņu nepieciešams astotās figūras izveidošanai!



- Pierakstot katras figūras veidošanai nepieciešamo sērkociņu skaitu pieaugošā secībā, iegūst virkni. Definē šo virkni rekurenti un ar n -tā locekļa formulu!

5. uzdevums (3 punkti)

Bišu mātēm no apaugļotajām olšūnām attīstās jaunas bišu mātes vai darba bites (darba bitēm nav pēcnācēju), no neapaugļotajām olšūnām attīstās trani. Tas nozīmē, ka traniem ir tikai viens no vecākiem – māte, bet bišu mātei ir abi vecāki – trans un māte.

- Uzzīmē trana ciltskoku līdz piektajai paaudzei!
- Definē rekurenti virkni, kuras pirmais loceklis ir trana senču skaits pirmajā paaudzē, otrais loceklis – trana senču skaits otrajā paaudzē utt., n -tais loceklis ir trana senču skaits n -tajā paaudzē!

6. uzdevums (5 punkti)

Dota virkne 4; 5; 7; 11; 18;..., kuras pirmais loceklis ir 4, bet katru nākamo virknes locekli iegūst, iepriekšējo reizinot ar 2 un no reizinājuma atņemot 3.

- Andris izvirzīja hipotēzi, ka šīs virknes vispārīgā locekļa formula ir $a_n = n + 3$, kur $n \in \mathbb{N}$. Pamato, ka Andrim nav taisnība!
- Kārlis izvirzīja hipotēzi, ka šīs virknes vispārīgā locekļa formula ir $a_n = 2^{n-1} + 3$, kur $n \in \mathbb{N}$. Pierādi to, izmantojot matemātisko indukciju!

VIRKNES

2. variants

1. uzdevums (3 punkti)

Virkne (a_n) ir uzdots ar vispārīgā locekļa formulu $a_n = 2n + 3$, $n \in \mathbb{N}$.

- Aprēķini šīs virknes devīto locekli!
- Nosaki, vai skaitlis 165 pieder šai virknei!

2. uzdevums (5 punkti)

- Izveido augošu aritmētisko progresiju, kuras diference ir 7 un uzraksti tās pirmos četrus locekļus!
- Izveido dilstošu ģeometrisko progresiju, kuras trešais loceklis ir 4 un uzraksti tās pirmos četrus locekļus! Norādi kvocientu!
- Izveido virkni, kura nav ne aritmētiskā progresija, ne ģeometriskā progresija! Definē šo virkni vai nu aprakstoši, vai ar n -tā locekļa formulu, vai rekurenti!

3. uzdevums (3 punkti)

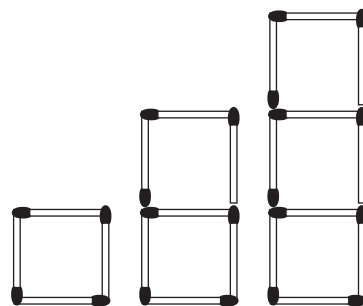
Virkne (x_n) ir uzdots rekurenti $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_{n+2} = x_n \cdot x_{n+1}$.

- Aprēķini virknes (x_n) ceturto locekli!
- Nosaki visus iespējamus ciparus, ar kuriem var beigties virknes (x_n) locekļi (apgalvojums nav jāpierāda)!

4. uzdevums (3 punkti)

Pēc noteikta principa no sērkociņiem tiek veidotas figūras. Katrā nākamajā figūrā kvadrātu skaits tiek palielināts par vienu (sk. zīm.).

- Nosaki, cik sērkociņu nepieciešams desmitās figūras izveidošanai!



- Pierakstot katras figūras veidošanai nepieciešamo sērkociņu skaitu pieaugošā secībā, iegūst virkni. Definē šo virkni rekurenti un ar n -tā locekļa formulu!

5. uzdevums (3 punkti)

Bišu mātēm no apaugļotajām olšūnām attīstās jaunas bišu mātes vai darba bites (darba bitēm nav pēcnācēju), no neapaugļotajām olšūnām attīstās trani. Tas nozīmē, ka traniem ir tikai viens no vecākiem – māte, bet bišu mātei ir abi vecāki – trans un māte.

- Uzzīmē trana ciltskoku līdz piektajai paaudzei!
- Definē rekurenti virkni, kuras pirmais loceklis ir trana senču skaits pirmajā paaudzē, otrais loceklis – trana senču skaits otrajā paaudzē utt., n -tais loceklis ir trana senču skaits n -tajā paaudzē!

6. uzdevums (5 punkti)

Dota virkne 5; 6; 8; 12; 20, kuras pirmais loceklis ir 5, bet katru nākamo virknes locekli iegūst, iepriekšējo reizinot ar 2 un no reizinājuma atņemot 4.

- Andris izvirzīja hipotēzi, ka šīs virknes vispārīgā locekļa formula ir $a_n = n + 4$, kur $n \in \mathbb{N}$. Pierādi, ka Andrim nav taisnība!
- Kārlis izvirzīja hipotēzi, ka šīs virknes vispārīgā locekļa formula ir $a_n = 2^{n-1} + 4$, kur $n \in \mathbb{N}$. Pierādi to, izmantojot matemātisko indukciju!

VIRKNES

Vērtēšanas kritēriji

| Uzdevums | Kritēriji | Punkti |
|----------|---|--------|
| 1. | Aprēķina prasīto virknes locekli – 1 punkts | 3 |
| | Sastāda vienādojumu – 1 punkts | |
| | Aprēķina kārtas numuru – 1 punkts | |
| 2. | Uzraksta aritmētiskās progresijas pirmos četrus locekļus – 1 punkts | 5 |
| | Uzraksta ģeometriskās progresijas pirmos četrus locekļus – 1 punkts | |
| | Nosaka kvocientu – 1 punkts | |
| | Uzraksta virkni, kura nav progresija – 1 punkts | |
| 3. | Definē uzrakstīto virkni – 1 punkts | 3 |
| | Aprēķina rekurenti uzdotās virknes ceturto locekli – 1 punkts | |
| | Apskata atsevišķus piemērus par virknes locekļu pēdējiem cipariem – 1 punkts | |
| 4. | Nosaka visus iespējamus virknes locekļu pēdējos ciparus – 1 punkts | 3 |
| | Nosaka sērkociņu skaitu astotajā (desmitajā) figūrā – 1 punkts | |
| | Definē sērkociņu skaita virkni rekurenti – 1 punkts | |
| 5. | Definē sērkociņu skaita virkni ar n – tā locekļa formulu – 1 punkts | 3 |
| | Uzzīmē trana ciltskoku līdz piektajai paaudzei – 1 punkts | |
| | Nosaka virknes locekļus – 1 punkts | |
| 6. | Definē virkni rekurenti – 1 punkts | 5 |
| | Ar pretpiemēru pamato, ka formula $a_n = n + 3$ ($a_n = n + 4$) nav dotās virknes n – tā locekļa formula – 1 punkts | |
| | Pamato indukcijas bāzi – 1 punkts | |
| | Formulē induktīvajā pārejā pierādāmo apgalvojumu – 1 punkts | |
| | Izprot, kā no a_k tiek iegūts a_{k+1} – 1 punkts | |
| | Pierāda induktīvo pāreju – 1 punkts | |
| | Kopā | 22 |