

**7.TEMATS      Trigonometriskie vienādojumi un nevienādības**

[Temata apraksts](#)

[Skolēnam sasniedzamo rezultātu ceļvedis](#)

[Uzdevumu piemēri](#)

M_11_SP_07_01_P1	<a href="#">Trigonometrisko izteiksmju pārveidojumi</a>	Skolēna darba lapa
M_11_SP_07_02_P1	<a href="#">Trigonometriskie vienādojumi un nevienādības</a>	Skolēna darba lapa
M_11_SP_07_02_P2	<a href="#">Trigonometriskie vienādojumi un nevienādības</a>	Skolēna darba lapa
M_11_UP_07_P1	<a href="#">Trigonometriskas identitātes</a>	Skolēna darba lapa
M_11_LD_07_P	<a href="#">Redukcijas formulas</a>	Skolēna darba lapa

---

Lai atvēru dokumentu aktivējiet saiti. Lai atgrieztos uz šo satura rādītāju, lietojiet taustiņu kombināciju **CTRL+Home**.

# TRIGONOMETRISKIE VIENĀDOJUMI UN NEVIENĀDĪBAS

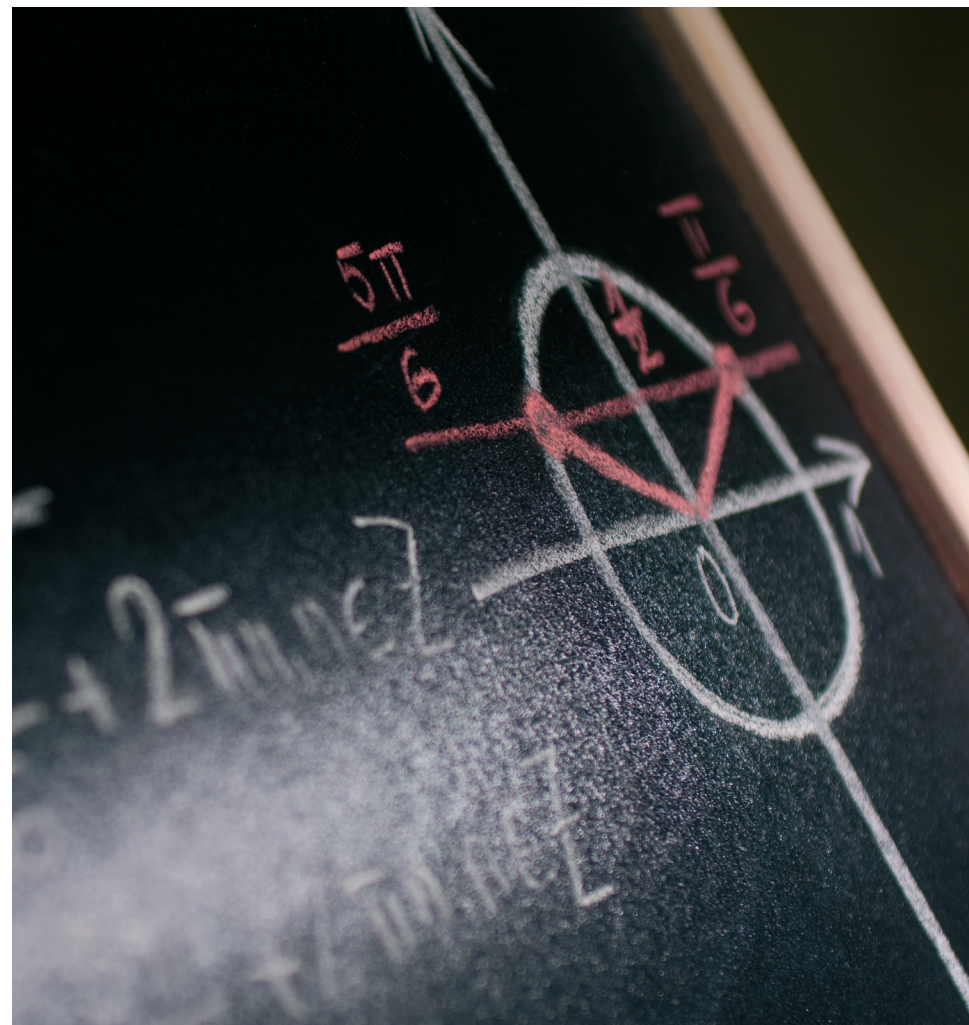
## TEMATA APRAKSTS

Temata apguve paplašina priekšstatu par funkciju lietojumu, pilnveido vienādojumu un nevienādību atrisināšanas prasmes, attīsta algoritmisko domāšanu, dod pieredzi vizuālu modeļu (trigonometriskais vienības riņķis) daudzpusīgai izmantošanai. Trigonometrijas pamatjēdzieni ir neatņemama matemātiskās kultūras sastāvdaļa, jo tos lieto citu tematu apgūvē. Trigonometrisko funkciju, sakarību izpratne sekmē atsevišķu fizikas tematu apguvi. Vienādojumu atrisināšanas metožu saskatīšana un lietošana būs noderīga arī turpmākajos algebras tematos.

Pamatskolā ir apgūtas trigonometriskās sakarības taisnleņķa trijstūrī, 10. klasē paplašinot leņķa jēdzienu, ieviests trigonometrisko funkciju jēdziens. Skolēni prot izpildīt algebriskus pārveidojumus, viņiem ir pieredze lietot dažādas vienādojumu atrisināšanas metodes, risinot algebriskus vienādojumus.

Skolēniem jauni ir jēdzieni: *arcsina*, *arccosa*, *arctga*, *arcctga*, kuri ieviešami, kā leņķa apzīmējums, ja to nav iespējams precīzi izteikt; nav paredzēts izvērst ciklometrisko funkciju jēdzienu.

Salīdzinājumā ar līdzšinējo pieeju, šī temata saturs ir samazināts, saturā atstāts būtiskākais un mainīti daži akcenti. Skolotāja galvenais uzdevums – parādīt tieši risināšanas metožu zināmu universālumu un funkcionālo sakarību daudzveidību, pilnveidot izpratni par definīcijas apgabala nozīmi un vienādojuma atrisināšanu. Tematā turpinās pamatošanas prasmju pilnveide, pierādot dažādas trigonometriskās sakarības. Jāpievērš uzmanība darbam ar informāciju, tās atlasī, piemēram, izvēloties nepieciešamo formulu. Svarīgi, ka nevis sarežģītu un samākslotu vienādojumu risināšana, bet gan nelielu, tomēr pilnīgi izprastu uzdevumu atrisināšana liecina gan par temata apguvi, gan arī par to, ka skolēnos veidojas zināmas kompetences šajā jomā.



## CEĻVEDIS

## Galvenie skolēnam sasniedzamie rezultāti

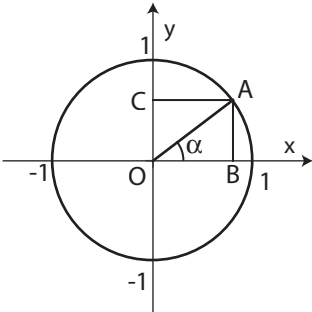
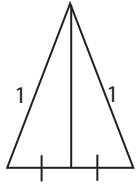
STANDARTĀ	Izprot izteiksmju definīcijas apgabala nozīmi, izpilda matemātisku izteiksmju (algebrisku, eksponenciālu, logaritmisku, trigonometrisku) identiskos pārveidojumus.	Izprot, ko nozīmē atrisināt vienādojumu, vienādojumu sistēmu; lieto vienādojumam, vienādojumu sistēmai piemērotus atrisināšanas algoritmus vai vispārīgās metodes. Izprot, ko nozīmē atrisināt nevienādību, nevienādību sistēmu, lieto nevienādībai, nevienādību sistēmai piemērotus atrisināšanas algoritmus vai vispārīgās metodes.	Atrod nepieciešamo informāciju dažādos informācijas avotos, novērtē tās pietiekamību, derīgumu.	Izprot pierādījuma nepieciešamību, būtību un struktūru, lieto dažādus pierādījumu veidus.	Plāno risinājumu; izvēlas vai izveido problēmai atbilstošu matemātisko modeli.
PROGRAMMĀ	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reducē, lieto sakarības starp viena argumenta trigonometriskām funkcijām, divkārsa argumenta formulas un argumentu saskaitīšanas formulas izteiksmju pārveidojumos, identitāšu pierādījumos un izteiksmju skaitlisko vērtību aprēķināšanā, pārveidojot trigonometriskos vienādojumus par pamatvienādojumiem.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Atrisinā trigonometriskos pamatvienādojumus: <math>\sin x = a</math>, <math>\cos x = a</math>, <math>\operatorname{tg} x = a</math>, <math>\operatorname{ctg} x = a</math>, izmantojot atrisināšanas formulas vai nolasot atrisinājumu vienības riņķī, izprot to, ka trigonometriskajiem vienādojumiem var būt bezgalīgi daudz atrisinājumu.</li> <li>• Atrisinā trigonometriskās pamatnevienādības: <math>\sin x &lt; a</math>, <math>\cos x &lt; a</math>, <math>\operatorname{tg} x &lt; a</math>, <math>\operatorname{ctg} x &lt; a</math>, (<math>&gt;</math>, <math>\leq</math>, <math>\geq</math>), izmantojot vienības riņķi.</li> <li>• Saskata vispārīgo vienādojumu risināšanas metožu (sadališana reizinātājos, substitūcijas metode) pielietošanas iespējas trigonometrisko vienādojumu risināšanā; izprot definīcijas apgabala nozīmi.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Atrod atbilstošo formulu uzzīņas literatūrā un prot to pielietot, veicot trigonometriskos pārveidojumus.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pamato trigonometriskās sakarības, izmantojot vienības riņķi, citas sakarības vai ģeometrisko figūru īpašības.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Izmanto vienības riņķi trigonometrisko funkciju vērtību, zīmju, vienādojumu un nevienādību atrisinājumu noteikšanai un/vai attēlošanai.</li> </ul>
STUNDĀ	<p><b>Vizualizēšana. Uzdevumu risināšana.</b> SP. Trigonometrisko izteiksmju pārveidojumi.</p> <p>VM. Trigonometrisko izteiksmju pārveidojumi.</p>	<p><b>Uzdevumu risināšana. Situācijas analīze.</b> SP. Trigonometrisko vienādojumu un nevienādību risināšanas prasmi novērtēšana.</p> <p>KD. Trigonometriskās nevienādības.</p>		<p><b>Izpēte.</b> LD. Redukcijas formulas.</p> <p>KD. Trigonometrisko formulu pierādīšana.</p>	<p><b>Demonstrējums.</b> VM. Vienības riņķis. VM. Vienādojuma un nevienādības atrisinājums vienības riņķī.</p>

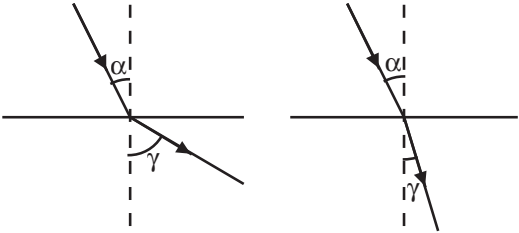
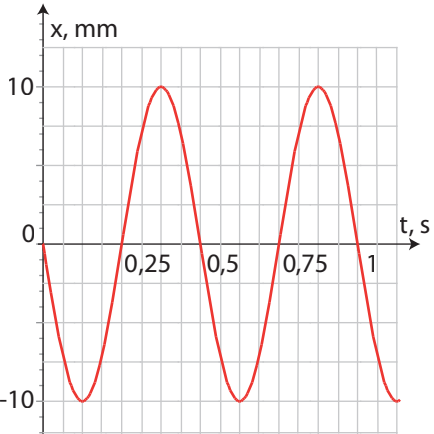
## UZDEVUMU PIEMĒRI

Sasniedzamais rezultāts	I	II	III
Izpilda algebriskus pārveidojumus ar trigonometriskām izteiksmēm.	Izpildi darbības! a) $\sin x + \sin x - \sin 2x$ b) $\frac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} x}{2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x}$	1. Izpildi darbības! $(\cos x - 3)^2 - \cos x \cdot \cos x + 6\cos x$ 2. Sadali reizinātājos! $5 - 15\cos x + 15\cos^3 x - 5\cos^2 x$	Vai doto izteiksmju vērtības ir vienādas visām pieļaujamām $x$ vērtībām! Atbilde pamato! a) $\sin^2 x, \sin x^2, (\sin x)^2$ b) $\cos 3x, 3\cos x$
Reducē, lieto sakarības starp viena argumenta trigonometriskām funkcijām, divkārsa argumenta formulas un argumentu saskaitīšanas formulas izteiksmju pārveidojumus, identitāšu pierādījumos un izteiksmju skaitlisko vērtību aprēķināšanā, pārveidojot trigonometriskos vienādojumus par pamatvienādojumiem.	1. Vienkāršo! a) $\sin^2 2t + \cos^2 2t$ b) $\operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{ctg} 3x$ c) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ 2. Pārveido doto trigonometrisko vienādojumu par pamatvienādojumu! $\sin x \cos 2x - \sin 2x \cos x = -1$	1. Aprēķini $75^\circ$ un $\cos 75^\circ$ , ņemot vērā, ka $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ ! 2. Pierādi identitāti! $\cos^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) = \cos 2\alpha$ 3. Dots, ka $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ un $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ . Aprēķini izteiksmes $\sin \alpha$ skaitlisko vērtību!	1. Vienkāršo! $\frac{\cos 36^\circ}{\sin 54^\circ}$ 2. Pierādi, ka izteiksmes vērtība nav atkarīga no $\alpha$ vērtības! $\cos^2 \alpha + \cos^2(120^\circ + \alpha) + \cos^2(120^\circ - \alpha)$ 3. Sastādi dotā vienādojuma risināšanas plānu! $\sin 3x = \cos x$

Sasniedzamais rezultāts	I	II	III
<b>Atrisini trigonometriskos pamatvienādojumus:</b> $\sin x = a$ , $\cos x = a$ , $\operatorname{tg} x = a$ , $\operatorname{ctg} x = a$ , izmantojot atrisināšanas formulas vai nolasot atrisinājumu vienības riņķi, izprot to, ka trigonetriskajiem vienādojumiem var būt bezgalīgi daudz atrisinājumu.	<p>1. Atrisini vienādojumu! <math>\cos y = 0,5</math> <math>\sin x = 0</math> <math>\sin x = -2</math></p> <p>2. Kuras no dotajām vērtībām ietilpst vienādojuma <math>\cos x = 0</math> atrisinājumu kopā?</p> <p>a) <math>\frac{\pi}{2}</math>,</p> <p>b) <math>\frac{5\pi}{2}</math>,</p> <p>c) <math>\frac{9\pi}{2}</math>,</p> <p>d) <math>\frac{-3\pi}{2}</math>.</p> <p>Uzraksti vēl trīs leņķa <math>x</math> vērtības, kas ietilpst vienādojuma <math>\cos x = 0</math> atrisinājumu kopā?</p>	<p>Atrisini vienādojumu! <math>\sin 0,5y = -0,5</math> <math>\operatorname{tg}(a-30^\circ) = \sqrt{3}</math> <math>\cos(2x + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}</math></p>	<p>1. Kādām parametra <math>a</math> vērtībām vienādojumam <math>2\cos x = a</math> ir atrisinājums?</p> <p>2. Atrisini abus vienādojumus un nosaki to kopīgos atrisinājumus! <math>\cos x = 0</math> un <math>\cos 2x = 0</math></p>
<b>Izprot jēdzienus – arcsina, arccosa, arctga, arcctga – , lieto tos vienādojumu un nevienādību risināšanā.</b>	<p>Kura no vienādībām ir patiesa?</p> <p>a) <math>\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ</math></p> <p>b) <math>\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 60^\circ</math></p> <p>c) <math>\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -60^\circ</math></p>	<p>1. Vienības riņķi attēlo leņķus <math>\arcsin \frac{2}{3}</math>, <math>-\arcsin \frac{2}{3}</math>, <math>\pi + \arcsin \frac{2}{3}</math>, <math>\pi - \arcsin \frac{2}{3}</math>!</p> <p>2. Atrisini vienādojumu! <math>\cos x = \frac{1}{5}</math></p>	<p>1. Atrodi vienu <math>x</math> vērtību, ar kuru dotā vienādība ir patiesa, un vienu <math>x</math> vērtību, ar kuru dotā vienādība nav patiesa! <math>\arcsin(\sin x) = x</math></p> <p>2. Pamato identitātes, izmantojot dotos zīmējumus (M_11_UP_07_P1)!</p>
<b>Atrisini trigonetriskās pamatnevienādības:</b> $\sin x < a$ , $\cos x < a$ , $\operatorname{tg} x < a$ , $\operatorname{ctg} x < a$ , ( $>$ , $\leq$ , $\geq$ ), izmantojot vienības riņķi.	<p>Attēlo vienības riņķi dotās nevienādības atrisinājumu!</p> <p>a) <math>\sin t \geq 0,5</math></p> <p>b) <math>\cos x &gt; -\frac{\sqrt{2}}{2}</math></p> <p>c) <math>\operatorname{tg} x \leq 1</math></p>	<p>1. Atrisini nevienādību <math>\cos x &lt; -0,5</math>, ja <math>x \in [0; 2\pi]</math>!</p> <p>2. Attēlo vienības riņķi un uzraksti nevienādības atrisinājumu! <math>\sin t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}</math></p>	<p>1. Attēlo vienības riņķi un uzraksti atrisinājumu trigonetriskajai pamatnevienādībai! <math>\cos x \geq \frac{1}{4}</math></p> <p>2. Kādām parametra <math>a</math> vērtībām nevienādībai <math>\cos 3x \geq a</math> nav atrisinājuma?</p>

Sasniedzamais rezultāts	I	II	III						
<b>Saskata vispārīgo vienādojumu risināšanas metožu (sadališana reizinātājos, substitūcijas metode) pielietošanas iespējas trigonometrisko vienādojumu risināšanā; izprot definīcijas apgabala nozīmi.</b>	<p>1. Atrodi pirmās kolonnas vienādojumam atbilstošu otrās kolonnas vienādojumu, ja ir izmantota substitūcija!</p> <table border="1"> <tr> <td><math>\sin^2x+2\sin x-15=0</math></td> <td><math>-a^2+a=0</math></td> </tr> <tr> <td><math>-\cos^2x+\cos x=0</math></td> <td><math>t^2-4=0</math></td> </tr> <tr> <td><math>\operatorname{tg}^2x-4=0</math></td> <td><math>b^2+2b-15=0</math></td> </tr> </table> <p>2. Sadali reizinātājos! <math>\operatorname{tg}^2x-2\operatorname{tg}x</math></p>	$\sin^2x+2\sin x-15=0$	$-a^2+a=0$	$-\cos^2x+\cos x=0$	$t^2-4=0$	$\operatorname{tg}^2x-4=0$	$b^2+2b-15=0$	<p>1. Atrisini vienādojumu! <math>\sin 2x-\cos x=0</math></p> <p>2. Atrisini vienādojumu <math>(\cos x+1)^2+\cos x-1=5</math></p>	<p>1. Atrisini vienādojumu! <math>\sin 2x+\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x=0</math></p> <p>2. Izlasi tekstu un izmanto iegūto informāciju, lai atrisinātu vienādojumu <math>\cos x-\sqrt{3}\sin x=0</math>! Ja vienādojuma <math>A=B</math> abas puses izdala ar izteiksmi <math>C(C \neq 0)</math>, tad iegūst dotajam vienādojumam ekvivalentu vienādojumu <math>\frac{A}{C}=\frac{B}{C}</math>.</p>
$\sin^2x+2\sin x-15=0$	$-a^2+a=0$								
$-\cos^2x+\cos x=0$	$t^2-4=0$								
$\operatorname{tg}^2x-4=0$	$b^2+2b-15=0$								
<b>Lieto jēdzienus – trigonometriskā funkcija, vērtību apgabals, pāra funkcija, nepāra funkcija, periodiska funkcija, periods –, pārveidojot trigonometriskās izteiksmes un aprēķinot to vērtības, atrisinot vienādojumus un nevienādības.</b>	<p>Uzraksti pamatojumu!</p> <p>a) <math>\cos(-60^\circ)=\cos(60^\circ)</math>, jo .....</p> <p>b) <math>\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x</math>, jo .....</p> <p>c) <math>\sin 750^\circ=\sin(2 \cdot 360^\circ+30^\circ)=\sin 30^\circ</math>, jo .....</p>	<p>1. Vienkāršo izteiksmi, pamatojot pārveidojumus!</p> <p>a) <math>\cos(-60^\circ)+\sin(-30^\circ)-\sin(390^\circ)</math></p> <p>b) <math>1-\operatorname{tg}(-x) \cdot \operatorname{ctg}(-x)</math></p> <p>2. Pamato, ka vienādojumam <math>2\sin x+3=7</math> nav sakņu!</p>	<p>1. Izmantojot vienības riņķi, izsaki dotās izteiksmes ar šaurā leņķa <math>x</math> trigonometrisko funkciju palīdzību! Saskati kopīgo iegūtajās sakarībās un formulē to!</p> <p><math>\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right), \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right), \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)</math></p> <p>2. Pamato, ka vienādojumam nav sakņu! <math>2\sin x-3\cos x=5</math></p>						
<b>Izmanto vienības riņķi trigonometrisko funkciju vērtību, zīmju, vienādojumu un nevienādību atrisinājumu noteikšanai un/vai attēlošanai.</b>	<p>1. Nosaki, vai izteiksmju <math>\sin 2\alpha; \cos(\alpha+\beta); \operatorname{tg} 3\beta</math> vērtības ir pozitīvi vai negatīvi skaitļi, ja <math>\alpha=63^\circ</math> un <math>\beta=78^\circ</math>!</p> <p>2. Leņķis <math>x</math> ir šaurs leņķis. Kurā kvadrantā atrodas leņķis <math>60^\circ+x; 90^\circ+x; 180^\circ+x; 360^\circ-x</math>?</p> <p>3. Izmantojot vienības riņķi, atrodi divus pirmā kvadranta leņķus, kuriem sinuss ir vienāds ar <math>\frac{1}{2}</math>, un divus otrā kvadranta leņķus, kuriem sinuss ir vienāds ar <math>\frac{1}{2}</math>! Pieraksti iegūtos rezultātus kā vienādības formā <math>\sin \alpha=\sin \beta</math>!</p>	<p>1. Atrodi negatīvu otrā kvadranta leņķi <math>x</math>, par kuru zināms, ka <math>\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}</math>!</p> <p>2. Par leņķiem <math>\alpha</math> un <math>\beta</math> zināms, ka <math>\cos \alpha=\cos \beta</math>. Attēlo vienības riņķi leņķus <math>\alpha</math> un <math>\beta</math>!</p> <p>2. Atrisini vienādojumu!</p> <p>a) <math>\cos 3x=\cos 6x</math></p> <p>b) <math>\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} 4x</math></p> <p>c) <math>\sin x=\sin(-x)</math></p>	<p>1. Dots, ka <math>\alpha \in [100^\circ; 200^\circ]</math> un <math>\beta \in [200^\circ; 250^\circ]</math>. Nosaki, kādās robežās atrodas izteiksmes <math>\sin(\alpha+\beta)</math> vērtības!</p> <p>2. Atrisini vienādojumu! <math>\frac{\cos 3x}{\cos x}=0</math></p>						

Sasniedzamais rezultāts	I	II	III
<p><b>Pamato trigonometriskās sakarības, izmantojot vienības riņķi, citas sakarības vai ģeometrisko figūru īpašības.</b></p>	<p>Zīmējumā dots vienības riņķis. Daudzpunktes vietā ieraksti atbilstošo leņķa funkciju!</p>  <p><math>AB=...</math>  <math>OB=...</math>  <math>OB^2+AB^2=...+...=1</math></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Trijstūrī <math>ABC</math> novilkta mediāna <math>CK</math>. Pierādi, ka <math>\sin(\angle AKC)=\sin(\angle CKB)</math>, izmantojot trijstūru <math>AKC</math> un <math>CKB</math> laukumus!</li> <li>2. Pierādi, ka <math>\cos(\pi-x)=-\cos x</math>, izmantojot vienības riņķi!</li> <li>3. Izmantojot trigonometrisko funkciju īpašības, redukcijas formulas un formulu <math>\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta</math> izsaki dotās izteiksmes ar leņķu <math>\alpha</math> un <math>\beta</math> trigonometriskajām izteiksmēm!             <ol style="list-style-type: none"> <li>a) <math>\sin(\alpha-\beta)</math></li> <li>b) <math>\cos(\alpha+\beta)</math></li> </ol> </li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Zināms, ka šauriem leņķiem <math>\alpha</math> ir spēkā sakarība <math>\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha</math>. Pierādi, ka šī sakarība ir spēkā jebkuram pagrieziena leņķim <math>\alpha</math>?</li> <li>2. Izmantojot doto zīmējumu un zināšanas par trijstūra laukumu, pierādi formulu <math>\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha</math>! Kādiem leņķiem <math>\alpha</math> ir pierādīta formula?</li> </ol> 
<p><b>Atrod atbilstošo formulu uzziņas literatūrā un prot to pielietot, veicot pārveidojumus.</b></p>	<p>Sameklē atbilstošu formulu un pārveido summu <math>\cos 3x+\cos 5x</math> reizinājumā!</p>	<p>Aprēķini izteiksmes <math>\sin \frac{\alpha}{2}</math> vērtību, ja <math>\cos\alpha=0,28</math> un <math>\alpha\in(270^\circ;360^\circ)</math>!</p>	<p>Atrisini vienādojumu!  <math>2\sin x-3\cos x=1</math></p>
<p><b>Izmanto pretpiemēru, novērtējot vienādības patiesumu.</b></p>	<p>Izmantojot konkrētu leņķa <math>x</math> vērtību, pamato, ka vienādība <math>\sin 2x=2\sin x</math> nav patiesa!</p>	<p>Pamato, ka sakarība <math>\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta</math> nav patiesa!</p>	<p>Vai sakarība <math>\operatorname{tg}x\cdot\cos x=\sin x</math> ir patiesa visām <math>x</math> vērtībām?</p>

Sasniedzamais rezultāts	I	II	III
<p><b>Saskata trigonometrisko izteiksmju pārveidojumu un vienādojumu lietojumu fizikā (svārstības, viļņi), mūzikas teorijā u.c.</b></p>	<p>Skolas fizikas kursā brīvās krišanas paātrinājums <math>g</math> tiek uzskatīts par konstantu lielumu, lai gan <math>g</math> mainās atkarībā no ģeogrāfiskā platuma <math>\theta</math> (grādos). Šo atkarību tuvināti apraksta formula <math>g \approx 9,78049(1 + 0,005288\sin^2\theta - 0,000006\sin^2 2\theta)</math>. Aprēķini brīvās krišanas paātrinājumu Rīgā (<math>\theta = 57^\circ</math>) un Dakārā (<math>\theta = 15^\circ</math>), lietojot kalkulatoru!</p>	<p>1. Dota izteiksme, kas raksturo strāvas stipruma <math>I</math> (ampēros) svārstības maiņstrāvas ķēdē <math>I = 30\sin(120\pi \cdot t)</math>, kur <math>t</math> – laiks sekundēs.</p> <p>a) Nosaki strāvas maksimālo stiprumu!</p> <p>b) Sastādi vienādojumu, kura atrisināšana ļautu noteikt laika momentus, kuros strāvas stiprums vienāds ar 0!</p> <p>c) Sastādi vienādojumu, kura atrisināšana ļautu noteikt laika momentus, kuros strāvas stiprums ir maksimāli iespējama!</p> <p>2. No fizikas kursa zināms, ka, gaismas staram pārejot no vienas vides otrā, krišanas leņķa <math>\alpha</math> sinusa attiecība pret laušanas leņķa <math>\gamma</math> sinusu ir vienāda ar gaismas stara ātruma otrajā vidē attiecību pret gaismas stara ātrumu pirmajā vidē. Atkarībā no ātrumu skaitliskajām vērtībām laušanas leņķis ir vai nu lielāks vai mazāks, salīdzinot ar krišanas leņķi (skat. zīm.).</p>  <p>Dots, ka gaismas stars pāriet no gaisa ūdenī. Gaismas stara ātrums gaisā ir <math>3 \cdot 10^8</math> km/s, bet gaismas stara ātrums ūdenī ir <math>2,25 \cdot 10^8</math> km/s. Kurš no leņķiem šajā gadījumā ir lielāks – krišanas vai laušanas leņķis? Atbildi pamato!</p>	<p>Grafikā attēlota svārstību kustībā esoša ķermeņa novirze no līdzsvara stāvokļa atkarībā no laika (1 sekunde atbilst 16 rūtīņām).</p>  <p>Svārstības raksturo formula <math>x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)</math> kur <math>x</math> – svārstības novirze no līdzsvara, <math>A</math> – amplitūda (novirzes maksimālā vērtība), <math>T</math> – periods (laiks, kurā notiek pilns kustības cikls), <math>t</math> – laiks.</p> <p>Izmantojot doto informāciju, aprēķini pirmos trīs laika momentus, kuros ķermenis būs novirzījies 5 mm no līdzsvara stāvokļa!</p>



## TRIGONOMETRISKO IZTEIKSMJU PĀRVEIDOJUMI

## 1. VEIDA KARTĪTES

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$	1
$\sin 2\alpha$	$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$
$\cos(\alpha - \beta)$	$\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$
$\operatorname{tg}(\pi + \alpha)$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{tg} 2\alpha$	$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$
$\cos(180^\circ - \alpha)$	$-\cos\alpha$
$1 + \operatorname{tg}^2\alpha$	$\frac{1}{\cos^2\alpha}$

## 2. VEIDA KARTĪTES (ZAĻAS)

$$1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{2\sin x}$$

$$(\sin x + \cos x)^2$$

$$\cos 24^\circ \cos 31^\circ - \sin 24^\circ \sin 31^\circ - \cos 55^\circ$$

$$\frac{\sin 8x}{\sin 4x} - 2\cos^2 2x$$

$$8\sin 15^\circ \cos 15^\circ (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) (\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ)$$

$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} + \operatorname{tg} x$$

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(-x)}{\operatorname{ctg}(\pi - x) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$$

## 2. VEIDA KARTĪTES (SARKANAS)

$1 + \sin 2x$	$0$
$0$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-2\sin^2 2x$	$\frac{1}{\cos x}$
$\sin x$	$-1$
$-\sin x$	

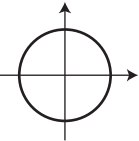
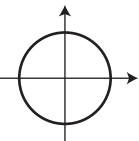
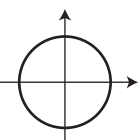
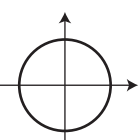
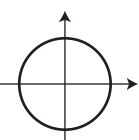
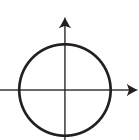
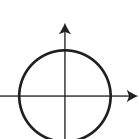
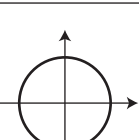
Vārds

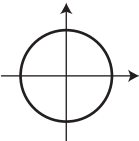
uzvārds

klase

datums

## TRIGONOMETRISKIE VIENĀDOJUMI UN NEVIENĀDĪBAS

	Risinājums un atbildes	Punkti
<b>1. uzdevums</b>	Atrisini vienādojumu!	
$\sin x = -1$		1 punkts
$\cos x = 0,5$		1 punkts
$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$		1 punkts
$\operatorname{ctg}(x+1) = 2$		2 punkti
<b>2. uzdevums</b>	Atrisini nevienādību!	
$\operatorname{ctg} x > -1$		1 punkts
$\cos x \leq -2$		1 punkts
$0 < \sin x < 1$		2 punkti
$\operatorname{tg} 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$		2 punkti

<b>3. uzdevums</b>	Pārveido vienādojumu par pamatvienādojumu! Vienādojums NAV jāatrisina.	
$\cos^2 x - \sin^2 x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$		1 punkts
$\operatorname{tg}(90^\circ - x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$		1 punkts
$\sin 2x \cos 3x + \cos 2x \sin 3x = 0$		1 punkts
$\sin x \cos x = 1$		1 punkts
<b>4. uzdevums</b>	Norādi metodi, kuru izmantosi vienādojuma atrisināšanai (substitūciju metode, sadalīšana reizinātājos)! Vienādojums NAV jāatrisina.	
$\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg}^2 x = 0$		1 punkts
$\cos^2 x - 3 \cos x - 4 = 0$		1 punkts
$\sin x - 1 + \sin^3 x - \sin^2 x = 0$		1 punkts
$\frac{1}{\operatorname{ctg} x + 1} + \operatorname{ctg} x + 1 = 0$		1 punkts
<b>5. uzdevums</b>	Atrisini vienādojumu!	
$\cos 4x = 2 \sin 2x - \frac{1}{2}$ vai $\operatorname{tg}(x+1) \operatorname{ctg}(2x+3) = 1$		7 punkti
Kopā punkti:		

# TRIGONOMETRISKIE VIENĀDOJUMI UN NEVIENĀDĪBAS

## Mājas darbs

### 1. uzdevums

Atrisini vienādojumu!

$$\sin x = -0,2$$

$$\cos x = 0,1$$

$$\operatorname{tg} x = -1$$

$$\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

### 2. uzdevums

Atrisini nevienādību!

$$\operatorname{tg} x < -1$$

$$\cos x > -2$$

$$\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{ctg} 2x \leq 5$$

### 3. uzdevums

Pārveido trigonometriskos vienādojumus par pamatvienādojumiem!

$$2\cos x \cdot \sin x = -\frac{2}{3}$$

$$\operatorname{ctg}(18\pi + x) = -2$$

$$(\sin 2x + \cos 2x)^2 = 2$$

$$\sin 4x \sin x - \cos x 4x \cos x = 4$$

### 4. uzdevums

Pārveido par algebrisku vienādojumu, izmantojot atbilstošu substitūciju!

$$1 + 2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x = 0$$

$$\cos^2 x - 3\cos x - 4\sin^2 x = 0$$

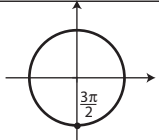
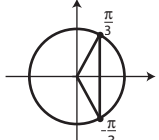
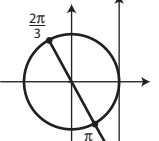
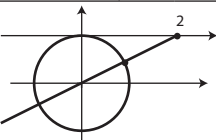
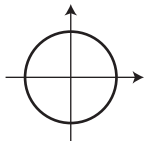
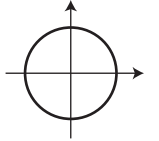
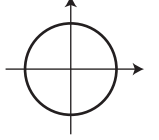
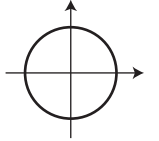
$$2\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - 3 = 0$$

### 5. uzdevums\*

Atrisini vienādojumu!

$$\left| \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \right| = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

# TRIGONOMETRISKIE VIENĀDOJUMI UN NEVIENĀDĪBAS

Risinājums un atbildes	
<b>1. uzdevums</b>	
	$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
	$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
	$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
	$x + 1 = \text{arcctg} 2 + \pi n$ $x = -1 + \text{arcctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
<b>2. uzdevums</b>	
	$x \in \left( \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}$
	$n \in \emptyset$
	$x \in \left( 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \cup \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}$
	$2x \in \left[ -\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n \right], n \in \mathbb{Z}$ $x \in \left[ -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} \right], n \in \mathbb{Z}$
<b>3. uzdevums</b>	
$\cos 2x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$	
$\text{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\sin(2x + 3x) = 0$	
$\sin 2x = 2$	

**Risinājums un atbildes****4. uzdevums**

Sadalīšana reizinātājos (iznešana pirms iekavām).

Substitūciju metode ( $\cos x = t$ ).

Sadalīšana reizinātājos (grupēšanas paņēmieni).

Substitūciju metode ( $\operatorname{ctg} x + 1 = t$ ).

**5. uzdevums**

$$\cos 4x = 2 \sin 2x - \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}(x+1) \operatorname{ctg}(2x+3) = 1$$

$$\cos^2 2x - \sin^2 2x - 2 \sin 2x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\operatorname{tg}(x+1) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(2x+3)}, \operatorname{ctg}(2x)$$

$$1 - \sin^2 2x - \sin^2 2x - 2 \sin 2x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\operatorname{tg}(x+1) = \operatorname{tg}(2x+3) \quad 2x+3 \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$2 \sin^2 2x + 2 \sin 2x - \frac{3}{2} = 0$$

$$2x+3 = x+1 + \pi n$$

$$\sin 2x = t$$

$$x = -2 + \pi n, n \in Z$$

$$4t^2 + 4t - 3 = 0$$

$$t_1 = -\frac{3}{2} \quad t_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 2x = -\frac{3}{2} \quad x \in \emptyset$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \quad 2x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ \frac{5\pi}{12} + \pi n \end{cases}, n \in Z$$

$$2x = \begin{cases} \frac{\pi}{12} + \pi n \\ \frac{5\pi}{12} + \pi n \end{cases}, n \in Z$$



Vārds .....

uzvārds .....

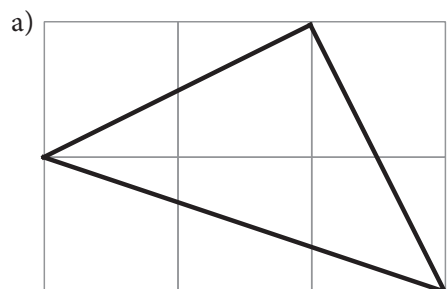
klase .....

datums .....

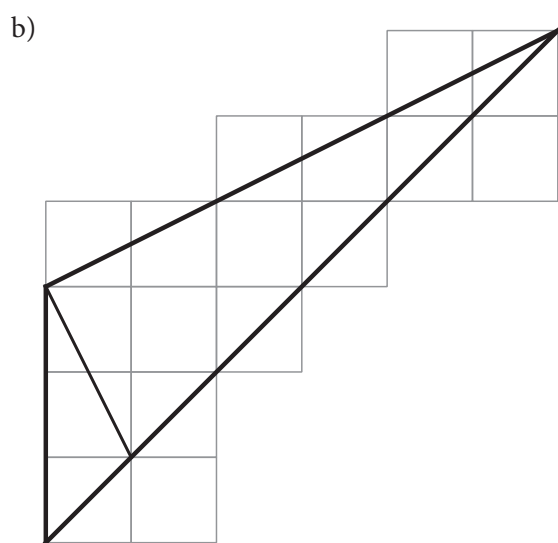
## TRIGONOMETRISKAS IDENTITĀTES

### Uzdevums

Izskaidro identitātes, izmantojot dotos zīmējumus!



$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$



$$\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \pi$$

Vārds

uzvārds

klase

datums

## REDUKCIJAS FORMULAS

### Situācijas apraksts

Funkcijas  $y = \sin x$  un  $y = \cos x$  ir periodiskas ar periodu  $360^\circ$ . Šo īpašību raksturo formulas  $\sin(360^\circ + \alpha) = \sin \alpha$  un  $\cos(360^\circ + \alpha) = \cos \alpha$ .

Mācoties par pagrieziena leņķi un tā atlikšanu vienības riņķī, tika iegūtas formulas  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$  un  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ , kas ir spēkā jebkuram šauram leņķim  $\alpha$ .

Izceltajās formulās šaurais leņķis  $\alpha$  tiek atņemts/pieskaitīts no/pie leņķiem  $180^\circ$  un  $360^\circ$ , kuri ir vienības riņķa kvadrantu robežleņķi. Kā zināms, ir vēl divi kvadrantu robežleņķi,  $90^\circ$  un  $270^\circ$ .

### Pētāmā problēma

Vai funkciju  $y = \sin x$  un  $y = \cos x$  vērtības leņķiem  $90^\circ \pm \alpha$ ,  $180^\circ \pm \alpha$ ,  $270^\circ \pm \alpha$  un  $360^\circ \pm \alpha$  vienmēr var izteikt kā šaura leņķa  $\alpha$  trigonometriskās funkcijas vērtības?

### Darba gaita

1. Izmantojot vienības riņķi, noskaidro, vai izteiksmju  $\sin(360^\circ - \alpha)$ ,  $\cos(360^\circ - \alpha)$ ,  $\sin(180^\circ + \alpha)$  un  $\cos(180^\circ + \alpha)$  vērtības var izteikt ar leņķa  $\alpha$  sinusa vai kosinusa palīdzību!
2. Izmantojot vienības riņķi, iegūsti analogiskas formulas attiecībā pret leņķiem  $90^\circ \pm \alpha$  un  $270^\circ \pm \alpha$ !
3. Analizējot visas iegūtās formulas kopumā, saskati principu, kuru lietojot, varētu noteikt funkcijas veidu un zīmi formulu labajā pusē!
4. Sagatavo iegūto rezultātu prezentāciju!

### Datu apstrāde un iegūto formulu pierādīšana

Uzdevumu veic uz papildu darba lapas!

### Rezultātu izvērtēšana

Kādas iespējas vispārināt darbā iegūtos rezultātus tu saskati?